Ferienserie 14

1. Bestimmen Sie die folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{2}{1+e^{-1/x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$.

2. Bestimmen Sie ob die folgende Reihen konvergieren:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$

3. Bestimmen Sie ob die folgende Integrale konvergieren:

a) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x+a)}dx$, wobei a eine positive Konstante ist.

b) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$

c) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx$.

4. Berechne die partielle Ableitungen f_x und f_y falls

a) $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x,y) = \sin(x^2y)\cos(xy^2)$.

5. Berechne die folgende Integrale

a) $\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x} =$

b) $\int \frac{arcsin(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Bitte wenden!

6. Ein ebenes Vektorfeld $K = (P, Q)^T$ wird *harmonisch* genannt, falls $\operatorname{div} K = P_x + Q_y \equiv 0$ und $\operatorname{rot} K = Q_x - P_y \equiv 0$ sind. Bezeichne K_α das Feld, das entsteht, wenn jeder Feldvektor eines Feldes K um den konstanten Winkel α gedreht wird. Zeigen sie, dass für ein harmonisches Feld K auch K_α harmonisch ist.

7. Es sei $c > 0$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Betrachten Sie die folgenden physikalischen Grössen, welche von Ort und Zeit abhängen:

$$\begin{aligned}
\varrho(t,x,y,z) &:\equiv \text{Dichte der elektrischen Ladungen.}\\
\mathbf{v}(t,x,y,z) &:\equiv \text{Geschwindigkeitsfeld der elektrischen Ladungen.}\\
\mathbf{J}(t,x,y,z) &:= \varrho(t,x,y,z)\cdot\mathbf{v}(t,x,y,z) \equiv \text{Stromdichtevektorfeld.}\\
\mathbf{E}(t,x,y,z) &:\equiv \text{Elektrisches Feld.}\\
\mathbf{B}(t,x,y,z) &:\equiv \text{Magnetisches Feld.}
\end{aligned}$$

Gemäss der klassischen Elektrodynamik gelten die Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\varrho\,, & \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\,\partial_t\,\mathbf{B}\,,\\
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0\,, & \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + \frac{1}{c}\,\partial_t\,\mathbf{E}\,.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass aus den Maxwell-Gleichungen die *Kontinuitätsgleichung*

$$\partial_t\varrho + \operatorname{div}\mathbf{J} = 0$$

folgt.

b) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung äquivalent ist zur Erhaltung der elektrischen Ladung.

Hinweis: Ladungserhaltung bedeutet, dass die Zu- bzw. Abnahme der elektrischen Ladung innerhalb jedes kompakten Bereiches $B \subset \mathbb{R}^3$ gleich dem Zu- bzw. Abfluss von Ladung durch die Randfläche ∂B ist.

8. Auf der Oberfläche eines kleinen Planeten mit Radius R und Masse M und ohne störende Atmosphäre steht eine Kanone, die zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Stein der Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ senkrecht nach oben schiesst.

a) Seien $r(t)$ der Abstand des Steins zum Planetenmittelpunkt und $v(t)$ seine Geschwindigkeit zur Zeit t. Bestimmen Sie aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$m\frac{d^2}{dt^2}r = -\frac{GmM}{r^2}$$

eine Differentialgleichung für die durch $\tilde{v}(r(t)) = v(t)$ charakterisierte Funktion $\tilde{v}$ (also die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand). Finden Sie eine Lösung davon zum Anfangswert $\tilde{v}(R) = v_0$.

b) Zeigen Sie, dass es eine Fluchtgeschwindigkeit $v_F > 0$ gibt, so dass das maximale Existenzintervall der Lösung $\tilde{v}$ aus (a) im Fall $v_0 < v_F$ endlich und im Fall $v_0 \geq v_F$ unendlich ist.

Siehe nächstes Blatt!

c) Zeigen Sie, dass im Fall $v_0 \geq v_F$ die Geschwindigkeit $v(t)$ für $t \to \infty$ gegen eine Endgeschwindigkeit $v_{End} \geq 0$ konvergiert und bestimmen Sie diese.

d) Zeigen Sie, dass im Fall $v_0 < v_F$ der Stein wieder auf den Planeten zurückfällt.

e) Leiten Sie aus der Formel für $\tilde{v}$ eine Formel für t als Funktion von r ab. Ist diese nützlich zur Beantwortung der Fragen (b) bis (d)?

9. Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$(\log y)(1+\sqrt{x})y' - (1-\sqrt{x})y = 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

10. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen:

a) $y'' - 4y = xe^{-x}$,

b) $y'' + y' = x + \cos x$.

11. Die Funktion $u \mapsto G(u)$ sei gegeben durch

$$G(u) = \int_{-1/2}^{1/2} \cos ux \cdot \frac{x+u}{x^2+x+1}\, dx$$

Berechnen Sie $G'(0)$.

12. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to\,]0,\infty[\, \times\,]0,\infty[\,, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix $J_f(x,y)$.

b) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

c) Überprüfen Sie, dass $J_{f^{-1}}(f(x,y))J_f(x,y) = \mathbb{1}$ gilt.

13. Berechnen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktion und entscheiden Sie, welche dieser Punkte lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte darstellen:

$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$$

14. Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 8x - 2y + 3$$

auf dem Bereich $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 3\big\}$

Bitte wenden!

15. Finden Sie das Maximum der Funktion

$$f(x,y,z)=x$$

auf der durch die Gleichungen $F(x,y,z)=G(x,y,z)=0$ definierten Kurve mit

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1, \qquad G(x,y,z)=x^3+y^3+z^3.$$

Benutzen Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren. (Es ist nicht nötig, die Kurve selbst zu beschreiben oder zu parametrisieren.)

16. Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x,y)=\arctan(xy-x-y)$$

das Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $P=(1,1)$.

17. **a)** Berechnen Sie das folgende Doppelintegral:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 x\cos y\,dx\,dy.$$

Berechnen Sie das Integral dann noch einmal nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Anpassung der Integrationsgrenzen nach dem Satz von Fubini.

b) Bei dem folgenden Integral ist die Integrationsreihenfolge umzukehren, d.h. die innere Variable soll zur äusseren werden. Wie lautet das neue Integral?

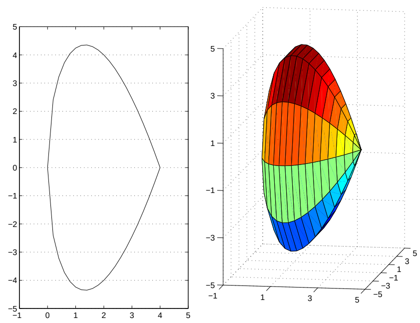
$$\int_{-1}^2\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx.$$

c) Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_D \cos(x+y)\,d\mu(x,y),$$

wobei D das von den Geraden $x=y$, $x=0$ und $y=\pi$ begrenzte Dreieck ist.

18. Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ_x bezüglich der x-Achse des homogenen Körpers konstanter Dichte ϱ, der durch Rotation des Graphen der Funktion $y(x)=(4-x)\sqrt{2x}$ (im Bereich, wo diese positive Werte annimmt) um die x-Achse entsteht, siehe Bild.



Siehe nächstes Blatt!

19. Bestimmen Sie für folgende Vektorfelder ein Potential, falls ein solches existiert.

a) $K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^3 \\ x + 5y \end{pmatrix}$ **b)** $K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 5 \\ 2xy - 8 \end{pmatrix}$

20. Betrachten Sie in der punktierten x-y–Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Umlaufintegral

$$I := \oint_\gamma K \cdot dx$$

um den Kreis γ mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $M := (0,0)^T$.

b) Zeigen Sie durch Konstruktion eines Potentials, dass K konservativ ist.

c) Verifizieren Sie durch explizite Rechnung, dass K die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$$

erfüllt.

21. Sei γ die Randkurve des beschränkten Gebiets im ersten Quadranten, das durch die Graphen von $y = x^2$ und $y = x^3$ begrenzt wird. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{K}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2y - x \end{pmatrix}$$

a) durch direkte Rechnung.

b) mit Hilfe des Satzes von Green.