Folgerungen aus dem Divergenzsatz

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^3$ und B ein kompakter Bereich in Ω mit stückweise glattem Rand ∂B. Der *Divergenzsatz* (oder Satz von Gauss) besagt, dass für jedes C^1 Vektorfeld $\vec{v}$ auf Ω

$$\int_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\omega = \int_B \nabla \vec{v}\ d\mu$$

Dabei bezeichnet $\vec{n}(x)$ den nach aussen zeigenden Normaleneinheitsvektor in einem Punkt $x \in \partial B$.

Die Greenschen Identitäten

Theorem. *Seien f und g zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf Ω. Dann gilt*

(i)

$$\int_B \left[f\Delta g + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \right] d\mu = \int_{\partial B} f\, D_{\vec{n}} g\ d\omega$$

Dabei bezeichnet für jeden Punkt $x \in \partial B$

$$D_{\vec{n}} g = (\nabla g) \cdot \vec{n}$$

die Richtungsableitung von g in Richtung $\vec{n}$.

(i)

$$\int_B \left[f\Delta g - g\Delta f \right] d\mu = \int_{\partial B} \left[f\, D_{\vec{n}} g - g\, D_{\vec{n}} f \right]\ d\omega$$

Beweis: (i) Nach dem Divergenzsatz, angewendet auf das Vektorfeld $f\nabla g$, ist

$$\int_{\partial B} f\, D_{\vec{n}} g\ d\omega = \int_{\partial B} (f\nabla g \cdot \vec{n})\ d\omega = \int_B \nabla \cdot (f\nabla g)\ d\mu = \int_B \left[f\Delta g + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \right] d\mu$$

denn $\nabla \cdot \nabla g = \Delta g$.

(ii) Nach Teil (i) gilt

$$\int_B \left[f\Delta g + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \right] d\mu = \int_{\partial B} f\, D_{\vec{n}} g\ d\omega$$
$$\int_B \left[g\Delta f + (\nabla g) \cdot (\nabla f) \right] d\mu = \int_{\partial B} g\, D_{\vec{n}} f\ d\omega$$

Subtrahieren dieser beiden Gleichungen gibt die Behauptung. $\blacksquare$

Varianten des Divergenzsatzes

Theorem *Sei f eine Funktion und $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf Ω. Dann gelten die Vektor–Identitäten*

$$\int_{\partial B} f\,\vec{n}\ d\omega = \int_B \nabla f\ d\mu$$

$$\int_{\partial B} (\vec{v} \times \vec{n})\ d\omega = -\int_B (\nabla \times \vec{v})\ d\mu$$

Beweis: Wir bezeichnen mit $\vec{e}_i$ den i–ten Einheitsvektor. Um die erste Gleichung zu beweisen, setze

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \int f\,\vec{n}\ d\omega$$

Nach dem Divergenzsatz, angewendet auf die Vektorfelder $f\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3\ )$ ist

$$e_i \cdot \vec{F} = F_i = \int_{\partial B} (f\vec{e}_i \cdot \vec{n})\ d\omega = \int_B \nabla(f\vec{e}_i)\ d\mu = \int_B \tfrac{\partial f}{\partial x_i}\ d\mu = e_i \cdot \int_B \nabla f\ d\mu$$

Damit ergibt sich die erste Gleichung.

Für die zweite Gleichung setze $\vec{T} = \int_{\partial B} (\vec{v} \times \vec{n})\ d\omega$. Ähnlich wie oben zeigen wir, dass für $i = 1, 2, 3$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{T} = -\vec{e}_i \cdot \int_B (\nabla \times \vec{v})\ d\mu$$

Dies prüfen wir für $i = 1$ nach. Nach dem Divergenzsatz ist

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \cdot \vec{T} &= \int_{\partial B} (v_2 n_3 - v_3 n_2)\ d\omega = \int_{\partial B} \begin{pmatrix} 0 \\ -v_3 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\ d\omega \\
&= \int_B \nabla \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -v_3 \\ v_2 \end{pmatrix}\ d\mu = \int_B \big(-\tfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \tfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \big)\ d\mu = -\int_B \vec{e}_1 \cdot (\nabla \times \vec{v})\ d\mu \\
&= -\vec{e}_1 \cdot \int_B (\nabla \times \vec{v})\ d\mu
\end{aligned}$$

■