Musterlösung 1

1. a) Es gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + y^3}{3xy^2} = \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{3}\,\frac{y}{x}\,.$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung, das heisst y' hängt nur von $\frac{y}{x}$ ab.

Setze $v := \frac{y}{x} \;\Rightarrow y(x) = v(x)\cdot x \Rightarrow y' = v'x + v$.

$$\begin{aligned} & y' &=& \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{3}\,\frac{y}{x} \\ \iff & v'x + v &=& \frac{2}{3}\,v^{-2} + \frac{1}{3}\,v \\ \iff & v'x &=& \frac{2}{3}\,(v^{-2} - v) \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung verschwindet nur bei $v = 1$. Die einzige konstante Lösung ist hier also $v = 1$ identisch, was zur Lösung $y = x$ führt.

Für nicht konstantes v rechnen wir weiter mit Separation der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{3v'}{v^{-2} - v} &= 2\,\frac{1}{x} \\ \int \frac{3v^2}{1 - v^3}\,dv &= \int 2\,\frac{1}{x}\,dx \\ -\ln|1 - v^3| &= 2\ln|x| + c \\ 1 - v^3 &= Cx^{-2} \qquad (\text{mit } C = \pm e^{-c}) \\ v &= \sqrt[3]{1 - Cx^{-2}} \\ \frac{y}{x} &= \sqrt[3]{1 - Cx^{-2}} \\ y &= x\,\sqrt[3]{1 - Cx^{-2}} \;=\; \sqrt[3]{x^3 - Cx}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $C = 0$ ist dies genau die obige konstante Lösung $y = x$.

b) Wir substituieren $u(x) := x + y(x)$. Dann ist $u'(x) = 1 + y'(x)$. Wir setzen dies in die gegebene Gleichung ein und erhalten $u'(x) = 1 + u^2(x)$. Diese Differentialgleichung können wir separieren:

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{du}{1 + u^2} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx + c$$

Somit ist $\arctan(u(x)) = x + c$ bzw. $u(x) = \tan(x + c)$. Die Rücksubstitution ergibt die allgemeine Lösung

$$y(x) = \tan(x + c) - x.$$

2. **a)** $\frac{x}{1+x^2}$ ist für alle $x \in (-\infty, +\infty)$ stetig.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad \text{(falls der Limes existiert)}\\
&= \lim_{R\to+\infty} \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{x=-R}^{0} \text{(nach Substitution } u = 1+x^2,\ du = 2xdx)\\
&= \lim_{R\to+\infty} -\tfrac{1}{2}\ln(1+R^2)\\
&= -\infty \qquad \text{ist nicht endlich.}
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral konvergiert also nicht.

b) $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ ist für $x \in (0, +\infty)$ stetig.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx &= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\searrow 0+}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx \qquad \text{(falls der Limes existiert)}\\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\searrow 0+}} e^{-1/x}\Big|_{x=\varepsilon}^{R} \qquad \text{(nach Substitution } u = -1/x,\ du = \tfrac{1}{x^2}\,dx)\\
&= \lim_{R\to+\infty} e^{-1/R} - \lim_{\varepsilon\searrow 0+} e^{-1/\varepsilon}\\
&= \lim_{t\to 0+} e^{-t} - \lim_{t\to\infty} e^{-t}\\
&= e^0 - 0 \;=\; 1\,.
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx = 1.$

Bemerkung: Mit Bernoulli–de l'Hospital kann man beweisen, dass die Funktion auch in den Randpunkt $x = 0$ des Integrationsbereichs stetig fortsetzbar ist, darum ist das Integral dort ein gewöhnliches Riemann-Integral (aber das wird hier nicht benötigt):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\searrow 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} &= \lim_{x\searrow 0+} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{B.-H.}{=} \lim_{x\searrow 0+} \frac{-\frac{2}{x^3}}{-\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\searrow 0+} \frac{\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{B.-H.}{=} \lim_{x\searrow 0+} \frac{-\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}}\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

c) Der Integrand $\frac{1}{x^2+2x+2}$ ist stetig auf dem Bereich $x \in (-\infty, +\infty)$, denn der Nenner $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ ist strikt positiv.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx &\\
&= \lim_{\substack{R_1\to+\infty\\ R_2\to+\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \qquad \text{(falls der Limes existiert)}\\
&= \lim_{\substack{R_1\to+\infty\\ R_2\to+\infty}} \arctan(x+1)\Big|_{x=-R_1}^{R_2}\\
&= \lim_{\substack{R_1\to+\infty\\ R_2\to+\infty}} [\arctan(R_2+1) - \arctan(-R_1+1)]\\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \pi\,.
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \pi.$

Siehe nächstes Blatt!

d) Die Unstetigkeitsstelle der Funktion $\frac{1}{|x|}$ liegt bei $x = 0$, das Integral ist also dort ein uneigentliches.

$$\Rightarrow \qquad \int_{-100}^{100} |x|^{-1/2}\, dx = \lim_{\varepsilon_1 \searrow 0^+} \int_{-100}^{-\varepsilon_1} |x|^{-1/2}\, dx + \lim_{\varepsilon_2 \searrow 0^+} \int_{\varepsilon_2}^{100} |x|^{-1/2}\, dx$$

falls beide Grenzwerte existieren und endlich sind.

$$\begin{aligned}
\text{1. Integral} \;=\; \lim_{\varepsilon_1 \searrow 0^+} \int_{-100}^{-\varepsilon_1} |x|^{-1/2}\, dx \;&=\; \lim_{\varepsilon_1 \searrow 0^+} \left(- \int_{100}^{\varepsilon_1} |-y|^{-1/2}\, dy \right) \\
&\qquad \text{(Substitution } y = -x,\ dx = -dy\text{)} \\
&=\; \lim_{\varepsilon_1 \searrow 0^+} \int_{\varepsilon_1}^{100} |y|^{-1/2}\, dy \\
&=\; \text{2. Integral}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \int_{-100}^{100} |x|^{-1/2}\, dx \;&=\; 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{100} |x|^{-1/2}\, dx \\
&=\; 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{100} x^{-1/2}\, dx \\
&=\; 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0^+} 2\, x^{1/2} \Big|_{x=\varepsilon}^{100} \\
&=\; 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0^+} (2 \cdot 100^{1/2} - 2\, \varepsilon^{1/2}) \;=\; 2 \cdot 2 \cdot 10 \;=\; 40\,.
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert: $\displaystyle\int_{-100}^{100} |x|^{-1/2}\, dx = 40.$

e) Die linearen Substitutionen $y := x - a$ und $z := \frac{1}{b-a} y$ liefern

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \;&=\; \int_0^{b-a} \frac{dy}{\sqrt{y(b-a-y)}} \\
&=\; \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}.
\end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir $z(1-z) = -(z-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1-(2z-1)^2)$;
Mit der weiteren linearen Substitution $t := 2z - 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} \;&=\; \int_0^1 \frac{dz}{\frac{1}{2}(\sqrt{1-(2z-1)^2})} \\
&=\; \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.
\end{aligned}$$

Wie aus der Vorlesung bekannt ist $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + \text{const}$ und damit

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Bitte wenden!

3. a) Beh.: $\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$ konvergiert.

Bew.: Die Funktion $\sin(\frac{1}{x})$ ist zwar unstetig in $x = 0$ aber die Funktion ist beschränkt, $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$. Damit folgt für jede Folge $x_k \to 0, x_k > 0$, dass

$$\begin{aligned} |\int_{x_n}^1 \sin(\frac{1}{x})dx - \int_{x_m}^1 \sin(\frac{1}{x})dx| &= \qquad |\int_{x_n}^{x_m} \sin(\frac{1}{x})dx| \leq |\int_{x_n}^{x_m} 1dx| \\ &= \qquad |x_n - x_m| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

D.h. die Folge $\int_{x_n}^1 \sin(\frac{1}{x})dx$ ist eine Cauchy-Folge und konvergiert daher.

Bemerkung: Analog kann man zeigen, dass aus $\int_a^b |f| dx < \infty$ (man nennt das Integral dann absolut konvergent) folgt, dass $\int_a^b f dx$ konvergiert. Das umgekehrte gilt jedoch nicht. (Vergleiche Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen).

b) Beh.: $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)\, dx$ konvergiert.

Bew.: Die Funktion ist offensichtlich stetig auf $]0, 1]$. Für $x \to 0$ gilt

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + ...)}{x \cdot (x - \frac{x^3}{3!} + ...)} = \frac{x \cdot (1 - \frac{x^2}{5!})}{1 - \frac{x}{3!}} \to 0.$$

Also ist die Funktion stetig ergänzbar in $x = 0$, d.h. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist stetig und das Integral konvergiert, da stetige Funktionen über kompakte Intervalle R-integrierbar sind.

c) Beh.: $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}\, dx$ konvergiert.

Bew.: Die Funktion ist stetig und positiv auf $[1, \infty[$ und wir müssen überprüfen ob $\int_1^R f(x)dx$ für $R \to \infty$ beschränkt ist.

Dazu schätzen wir den Integranden durch eine Funktion nach oben ab, die wir explizit integrieren können:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \leq \frac{2}{x\sqrt{x}}.$$

Weil $\int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}$ konvergiert, so konvergiert auch das $\int_1^\infty f(x)dx$.

4. Sei $I \equiv \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$, $s > 1$. Für $s = 1$ haben wir:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \Big[\log x\Big]_1^R = \lim_{R\to\infty} \log R - \underbrace{\log 1}_{=0} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Andererseits haben wir für $s < 1$:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^s} = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^R \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{R^{-s+1} - 1}{-s+1} \\ &= +\infty \text{ , da } -s+1 > 0. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Nun können wir für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, folgende Zerlegung betrachten:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^s} = \sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^s}$$

Da der Integrand streng monoton fallend ist, erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^s} \leq \sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{(k-1)^s} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)^s} \int_{k-1}^{k} dx = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)^s} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^s}$$

Damit folgt für alle $s \leq 1$, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^s} \geq \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^s} = +\infty$$

Das heisst, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ divergiert.

Online-Abgabe

5. Frage 1

Gegeben sei eine lineare und homogene Differentialgleichung, welche $y(x) = \sin x$ als Lösung besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

◯ $y(x) = \sin x + 1$ ist ebenfalls eine Lösung.

◯ $y(x) = \sin 2x$ ist ebenfalls eine Lösung.

√ ◯ $y(x) = 2\sin x$ ist ebenfalls eine Lösung.

Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum. Insbesondere ist für jede Lösung y und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch λy eine Lösung. Also ist (c) richtig.

Dagegen sind (a) und (b) falsch, denn z.B. wird $y'' + y = 0$ von $y(x) = \sin x$ gelöst, aber weder von $y(x) = \sin x + 1$ oder von $y(x) = \sin 2x$.

Frage 2

Die Differentialgleichung

$$y'^2 - 2y' + 2 = \frac{y}{x}$$

◯ ist separierbar.

√ ◯ ist homogen.

◯ ist linear.

◯ ist unlösbar.

◯ ist von der Ordnung 2.

Die Gleichung ist äquivalent zu $(y'-1)^2 = \frac{y}{x} - 1$ und somit zu $y' = 1 \pm \sqrt{\frac{y}{x} - 1}$. Hier ist die rechte Seite eine Funktion von $\frac{y}{x}$, also ist die Gleichung homogen und die richtige Antwort lautet (b). Separierbar ist die Gleichung nicht, da man sie nicht so umformen kann, dass alle x und dx auf einer Seite und alle y und dy auf der anderen Seite stehen. Der Term y'^2 macht sie nicht-linear. Ihre Ordnung ist aber 1, weil die erste Ableitung y' die höchste darin vorkommende Ableitung ist. Lösbar ist die Gleichung durchaus; auf dem Bereich $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x > 0\}$ sogar eindeutig, weil die Funktion $(x, y) \mapsto 1 \pm \sqrt{\frac{y}{x} - 1}$ dort lokal Lipschitz-stetig ist.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 3

Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

- ◯ $y' + y^2 + x = 0$
- ◯ $y'^2 + y + x = 0$
- √ ◯ $y' + x^2 y = 0$
- ◯ $y' + xy^2 = 0$

Eine lineare Differentialgleichung für eine Funktion $y(x)$ muss linear in y und y' sein, aber nicht notwendigerweise in x. Also ist (c) die richtige Antwort.