Musterlösung 11

1. Wir betrachten folgenden Bumerang Mit Rand

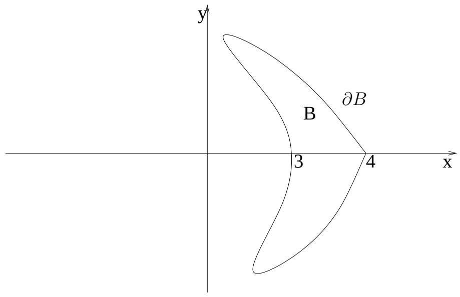


Abbildung 1: Bumerang B

$$\gamma: \ t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos^2 t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Für eine Körper B mit konstanter Dichte $\varrho = 1$ ist der Schwerpunkt $S = (x_s, y_s)$ gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{\mu(B)} \int_B x\, d\mu \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{\mu(B)} \int_B y\, d\mu\,,$$

wobei $\mu(B)$ die Fläche von B ist. Diese Integrale wollen wir nun ausrechnen. Zuers müssen wir $\mu(B)$ berechnen. Dazu betrachten wir das Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q)$ mit $P = 0$ und $Q = x$. So lässt sich mit dem Satz von Green die Fläche von B berechnen

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_B 1\, d\mu = \int_B Q_x - P_y\, dx\, dy = \int_{\partial B} \mathbf{K}\, d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos^2 t + \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6\sin t \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3\cos^3 t + \cos^2 t\, dt \end{aligned}$$

Wir wissen bereits

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2} (\sin t \cos t + t) \Big|_0^{2\pi} = \pi\,.$$

Weiter folgt

$$\int_0^{2\pi} 3\cos^3 t\, dt = \int_0^{2\pi} 3(1 - \sin^2 t) \cos t\, dt = \left(3\sin t - \sin^3 t\right) \Big|_0^{2\pi} = 0\,.$$

Daraus folgt

$$\mu(B) = \pi\,.$$

Bitte wenden!

Da der Bumerang symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, folgt, dass $y_s = 0$ gelten muss. Deshalb bleibt x_s zu berechnen. Dazu wählen wir das Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q)$ mit $P = 0$ und $Q = \frac{1}{2}x^2$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{\mu(B)} \int_B x \, d\mu = \frac{1}{\pi} \int_B Q_x - P_y \, d\mu = \frac{1}{\pi} \int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot \, d\vec{x} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \left(3\cos^2 t + \cos t\right)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \sin t \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(3\cos^2 t + \cos t\right)^2 \cos t \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{9}{2} \cos^5 t + 3 \cos^4 t + \frac{1}{2} \cos^3 t \, dt \end{aligned}$$

Zuerst folgt wie oben

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos^3 t \, dt = \frac{1}{6\pi} \left(3 \sin t - \sin^3 t\right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \, .$$

Als nächstes berechnen wir mittels partieller Integration

$$\int \cos^4 t \, dt = \cos^3 t \sin t + 3 \int \cos^2 t \sin^2 t \, dt = \cos^3 t \sin t + 3 \int \cos^2 t (1 - \cos^2 t) \, dt \, .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int \cos^4 t \, dt &= \frac{1}{4} \left(\cos^3 t \sin t + 3 \int \cos^2 t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos^3 t \sin t + \frac{3}{2} \left[\cos t \sin t + t \right] \right) + C \, . \end{aligned}$$

Somit berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 3 \cos^4 t \, dt &= \frac{3}{4\pi} \left(\cos^3 t \sin t + \frac{3}{2} \left[\cos t \sin t + t \right] \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{9}{4} \, . \end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir

$$\frac{9}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^5 t \, dt \, .$$

Wieder mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int \cos^5 t \, dt &= -\cos^4 t \sin t + 4 \int \cos^3 t \sin^2 t \, dt \\ &= -\cos^4 t \sin t + 4 \int \cos^3 t \left(1 - \cos^2 t\right) \, dt \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} \int \cos^5 t \, dt &= \frac{1}{5} \left(-\cos^4 t \sin t + \int \cos^3 \, dt \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(-\cos^4 t \sin t + \frac{1}{3} \left[3 \sin t - \sin^3 t \right] \right) + C \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Damit folgt

$$\frac{9}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^5 t\,dt = \frac{9}{10\pi}\left(-\cos^4 t\sin t + \frac{1}{3}\left[3\sin t - \sin^3 t\right]\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= 0\,.$$

Damit ist der Schwerpunkt des Bumerangs

$$S = \left(\frac{9}{4}, 0\right)\,.$$

Bemerkung: Es gilt allgemein

$$\int_0^{2\pi}\cos^n(t)\,dt = 0 \quad \text{für} \quad n\in\mathbb{N} \quad \text{ungerade.}$$

Begründung: Zuerst bemerken wir

$$\int_0^{\pi}\cos^n(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\,dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(u)\,du = 0\,,$$

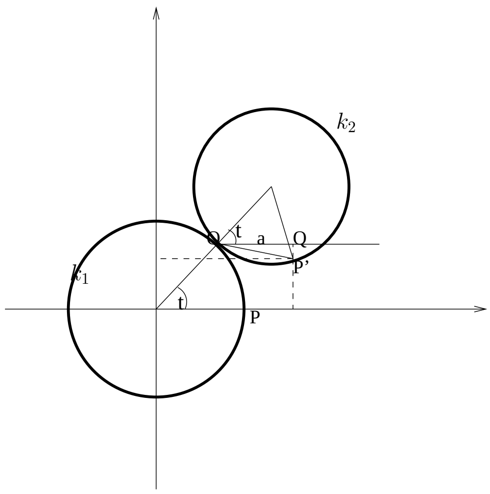
da $\sin(u)$ ungerade auf $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ist. Weiter folgt mit der Substitution $u = t-\pi$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n(u)\,du = -\int_0^{\pi}\cos^n(t)\,dt = 0\,.$$

Damit

$$\int_0^{2\pi}\cos^n(t)\,dt = \int_0^{\pi}\cos^n(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\cos^n(t)\,dt = 0\,.$$

2. Sei P der Punkt mit Koordinaten $(1,0)$ auf dem Kreis k_2 und sei P' die Lage des Punktes P nach der Zeit t. Wir brauchen die Koordinaten des Punktes P' zu berechnen. Der Winkel



$\measuredangle(P'OQ) = 90 - \frac{t}{2} - t = 90 - \frac{3t}{2}$. Die Länge der Strecke $0P'$ ist $|OP'| = 2\sin(\frac{t}{2})$ und die Länge der Strecke OQ ist

$$|OQ| = a = 2\sin(\frac{t}{2})\cos(90-\frac{3t}{2}) = \sin(90-t) + \sin(2t-90)$$
$$= \cos(t) - \cos(2t)$$

Bitte wenden!

Änlich ist die Länge der Strecke $P'Q$ gleich

$$\begin{aligned}|P'Q| = b &= 2\sin(t/2)\sin(90 - \frac{3t}{2}) = \cos(2t - 90) - \cos(90 - t)\\ &= \sin(2t) - \sin(t)\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes P', $P'(x_p, y_p)$ erfüllen $x_p = \cos(t) + a = 2cos(t) - \cos(2t)$ und $y_p = \sin(t) - b = 2\sin(t) - \sin(2t)$. Also, die Gleichung der Epizykloide ist

$$\gamma(t) = (2cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t)).$$

Die Fläche des Gebietes B begrenzt durch γ lässt sich mit der Formel von Green berechnen. Sei $K = (P, Q)$ das Vektorfeld mit $P = 0$ und $Q = x$. Mit der Formel von Green gilt

$$\begin{aligned}\text{Fläche}(B) &= \int_B (Q_x - P_y)dxdy = \int_{\partial B} K(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos(t) - 2\cos(2t))(2\cos(t) - \cos(2t))dt =\\ &= \int_0^{2\pi} (4\cos^2(t) - 6\cos(t)\cos(2t) + 2\cos^2(2t))dt\\ &= \int_0^{2\pi} \Big(3 + 2\cos(2t) + \cos(4t) - 3(\cos(3t) + \cos(t))\Big)\\ &= 6\pi.\end{aligned}$$

3. Der Fluss eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch eine positiv orientierte Kurve $\gamma(t)$ $t \in [a, b]$ ist definiert durch

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds := \int_a^b \mathbf{v}(\gamma(t)) \cdot \mathbf{n}(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt\,,$$

wobei $\mathbf{n}$ der nach rechts weisende Normalenvektor mit Länge 1 ist. Der Satz von Gauss besagt *Für ein Strömungsfeld* $\mathbf{v} = (P, Q)$ *auf dem Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *und* $B \subset \Omega$ *ein Bereich mit positiv orientiertem Rand* ∂B *gilt*

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\mu\,.$$

Wir betrachten das Gebiet B, wie auf dem Bild 2. Berechnen wir zuerst das Flussintegral für

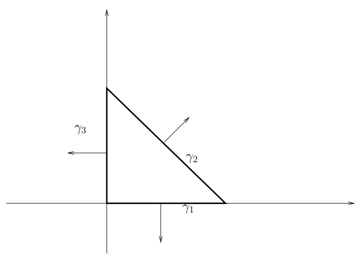


Abbildung 2: Gebiet B

das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y) := (xy - y^2, x^2 + y^3)\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dazu parametrisieren wir den Rand wie folgt

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0,1].$$

Die dazugehörigen Normalenvektoren sind

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir den Fluss durch den Rand $\partial B = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Zuerst den Fluss durch γ_1

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)t - t^2 \\ (1-t)^2 + t^3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{2} \, dt \\
&= \int_0^1 t^3 - t^2 - t + 1 \, dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Für γ_2 folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -(1-t)^2 \\ (1-t)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} |1| \, dt \\
&= \int_0^1 (1-t)^2 \, dt = -\frac{1}{3}(1-t)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Zuletzt berechnen wir den Fluss durch γ_3

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} |1| \, dt \\
&= \int_0^1 -t^2 \, dt = -\frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Damit folgt der Fluss durch ∂B

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

Andererseits berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu &= \int_B \partial_x P + \partial_y Q \, dx \, y = \int_B y + 3y^2 \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y + 3y^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 + (1-x)^3 \, dx \\
&= \left(-\frac{1}{6}(1-x)^3 - \frac{1}{4}(1-x)^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{12},
\end{aligned}$$

was in der Tat dasselbe Resultat wie das Flussintegral liefert.

4. Die Divergenz des Vektorfeldes K, $\operatorname{div}(K)$ ist

Bitte wenden!

Frage 1

$\mathbf{K}(x, y, z) = (x^3 + y + 2xz, x + yz + z^3, x^2 + z^3)$,

○ $\text{div}(K) = 3x^2 + 2z + 3$

√ ○ $\text{div}(K) = 3x^2 + 3z + 3z^2$

Sei $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld,

$$K(x, y, z) = (K_1(x, y, z), K_2(x, y, z), K_3(x, y, z))$$

Die Divergenz von K ist definiert als

$$\text{div}(K) = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}$$

Hier ist $\text{div}(K) = 3x^2 + 3z + 3z^2$.

Frage 2

$K(x, y) = (x^2 - y^2, 2y - x) = (P(x, y), Q(x, y))$

○ $\text{div}(K) = -2y - 1$

√ ○ $\text{div}(K) = 2x + 2$

$\text{div}(K) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2$

Frage 3

$\mathbb{K}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$

√ ○ $\text{div}(K) = 0$

○ $\text{div}(K) = 2xy$