Musterlösung 13

1. Wir berechnen zunächst den Gradienten

$$\nabla f = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und erhalten damit

$$v(x,y,z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x + a_2 z - a_3 y \\ y + a_3 x - a_1 z \\ z + a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}$$

a) $\operatorname{div} \mathbf{v}(x,y,z) = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1.$

b) Wende den **Satz von Gauss** an:

$$\int_F \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_{\text{Inneres}} \operatorname{div} \mathbf{v}\, \mathrm{d}V \overset{\text{a)}}{=} \int_{\text{Einheitskugel}} 1\, \mathrm{d}V$$

Das ist aber das Volumen der Einheitskugel: $\frac{4}{3}\pi$.

c) $\mathbf{rot}\, \mathbf{v}(x,y,z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\mathbf{a}.$

d) Bezeichne B die Einheitsscheibe, deren Rand ∂B der Einheitskreis ist. Der Satz von Stokes liefert für die Zirkulation

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_B \mathbf{rot}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}A \\ &\overset{\text{c)}}{=} \int_B \frac{2}{3}\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\, \mathrm{d}A \\ &= \int_B \frac{2}{3}|\mathbf{a}|\, \mathrm{d}A \end{aligned}$$

Das ist $\frac{2}{3}|\mathbf{a}|$ mal dem Flächeninhalt von B; die Zirkulation ist also

$$\frac{2\pi}{3}|\mathbf{a}| = \frac{2\pi}{3}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

2. Zu zeigen ist

$$\int_{\partial S} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_S \mathbf{rot}\ \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\omega}$$

Der Rand von S ist ein Kreis, der parametrisiert werden kann durch

$$x(t) = \cos t \qquad y(t) = \sin t \qquad z(t) = 0.$$

Bitte wenden!

Das gibt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial S} \mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2x-y \\ -yz^2 \\ -y^2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ -\sin t \cdot 0 \\ -\sin^2 t \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - 2\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t = \pi\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} -2xy+2yz \\ 0-0 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n} &= \underbrace{|\mathbf{rot}\,\mathbf{V}|}_{1}\cdot \underbrace{|\mathbf{n}|}_{1}\cdot\cos\Big(\underbrace{\angle(\mathbf{rot}\,\mathbf{V},\mathbf{n})}_{\theta}\Big) \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

Das gibt in Kugelkoordinaten:

$$\int\limits_S \mathbf{rot}\mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \int\limits_S \mathbf{rot}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\omega = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

Also gilt der Satz von Stokes hier tatsächlich.

3. a) Wir parametrisieren den Randzyklus durch die drei Kurven

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}, \quad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t\in[0,1]\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_\gamma K\cdot dr &= \sum_{k=1}^{3}\int_{\gamma_k} K\cdot dr = 3\int_{\gamma_1} K\cdot dr = 3\int_0^1 K(\gamma_1(t))\cdot\dot{\gamma}_1(t)\,dt \\ &= 3\int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t-t \\ t+1-t \\ -1+t+t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 3\int\limits_0^1 2t\,dt = 3\,,\end{aligned}$$

wobei wir bei der zweiten Gleichung die Symmetrie benutzt haben.

b) Wir berechnen die Zirkulation mit dem Satz von Stokes:

$$\int\limits_{\gamma=\partial D} K\cdot dr = \int\limits_D \operatorname{rot} K\cdot d\vec{\omega} = \int\limits_D \operatorname{rot} K\cdot n\,d\omega,$$

wobei D das von γ berandete ebene Dreieck sei. Wir parametrisieren D:

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u,v\in[0,1] \quad \text{und} \quad 0\le u+v\le 1\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Es gilt

$$d\vec{\omega}(u,v) = (\partial_u r \times \partial_v r)\, d\mu(u,v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\mu(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\mu(u,v)\,.$$

Die Rotation von $K = (K_x, K_y, K_z)$ ist

$$\operatorname{rot} K = \begin{pmatrix} \partial_y K_z - \partial_z K_y \\ \partial_z K_x - \partial_x K_z \\ \partial_x K_y - \partial_y K_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Darum gilt $\operatorname{rot} K \cdot d\vec{\omega} = 6\, d\mu(u,v)$. Somit folgt

$$\int_D \operatorname{rot} K \cdot d\vec{\omega} = \int_D 6\, d\mu(u,v) = \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1-u} 6\, d\mu(u,v) = 6 \int_0^1 (1-u) du = 3\,.$$

Aliter: Nach Stokes gilt

$$\int_\gamma K \cdot dr = \int_D \operatorname{rot} K \cdot d\vec{\omega} = \int_D \operatorname{rot} K \cdot n\, d\omega\,.$$

Der äusser Einheitsnormalenvektor ist $n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also gilt

$$\int_D \operatorname{rot} K \cdot n\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 \int_D d\omega\,.$$

Das Integral $\int_D d\omega$ liefert die Fläche des Dreiecks D. Dabei handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\sqrt{2}$, also mit Höhe $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}$ und Fläche $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Daraus folgt

$$\int_D \operatorname{rot} K \cdot n\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\,.$$

4. a) Sei $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$. Offensichtlich ist f definiert auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir berechnen $\triangle(f)$.

$$\begin{aligned}
\triangle(f) &= \triangle(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)) \\
&= \frac{1}{2}\partial^2_{xx}(\ln(x^2+y^2)) + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}(\ln(x^2+y^2)) \\
&= \frac{1}{2}\partial_x(\frac{2x}{x^2+y^2}) + \frac{1}{2}\partial_y(\frac{2y}{x^2+y^2}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{2}\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.
\end{aligned}$$

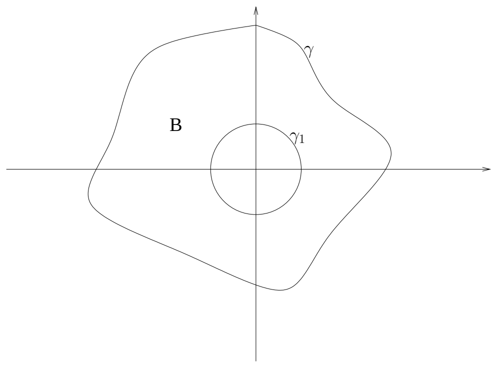

Abbildung 1: Bereich B, begrenzt durch γ und γ_1

b) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Bereich wie auf dem Bild 1 Bemerken Sie, dass B durch zwei Kurven γ und γ_1 begrenzt ist, wobei γ_1 ein Kreis mit Radius $r > 0$ ist. Sei v ein Vektorfeld, nach dem Divergenzsatz ist

$$\int_{\partial B} v \cdot \overrightarrow{n} ds = \int_B \operatorname{div}(v) d\mu(x, y).$$

Hier ist $v = \operatorname{grad}(\ln(r))$, und als $\operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = \triangle$. Wir haben

$$\int_{\partial B} \operatorname{grad}(\ln(r)) \cdot \overrightarrow{n} ds = \int_B \triangle(\ln(r)) d\mu(x, y) = 0 \Rightarrow$$
$$I = \int_\gamma \operatorname{grad}(\ln(r)) \cdot \overrightarrow{n} ds = \int_{\gamma_1} \operatorname{grad}(\ln(r)) \cdot \overrightarrow{n} ds$$

Wir parametrisieren γ_1 als $\gamma_1(t) = (r\cos(t), r\sin(t)),\ t \in [0, 2\pi]$. Nach der Deffinition ist

$$\int_{\gamma_1} v \cdot \overrightarrow{n} ds = \int_0^{2\pi} v(\gamma_1(t)) \cdot n(\gamma_1(t)) |\dot{\gamma}_1(t)| dt.$$

In dieser Formel bezeichnet n nach rechts weisende Normaleneinheitsvektor, also $n(\gamma_1(t)) = (\cos(t), \sin(t))$. Als $\operatorname{grad}(\ln(r)) = \operatorname{grad}(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$, längs γ_1 ist

$$\operatorname{grad}(\ln(r)) = (\frac{\cos(t)}{r}, \frac{\sin(t)}{r})$$

Daraus folgt

$$I = \int_0^{2\pi} \operatorname{grad}(\ln(r)) \cdot n(\gamma_1(t)) |\dot{\gamma}_1(t)| dt = \int_0^{2\pi} (\frac{\cos(t)}{r}, \frac{\sin(t)}{r}) \cdot (\cos(t), \sin(t)) r dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt = 2\pi.$$