Musterlösung- Ferienserie 14

1. a) Falls

$$x \to 0+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow -\frac{1}{x} \to -\infty$$
$$\Rightarrow e^{-1/x} \to 0 \Rightarrow 1 + e^{-1/x} \to 1.$$

Der Grenzwert ist $2/1 = 2$.

b) Beide Zähler und Nenner gehen hier gegen 0, deswegen können wir hier den Satz von l'Hopital anwenden.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{8x^3 - 18x^2 + 2x}{1} = -8$$

c) Die Funktion $\sin(1/x)$ is begrenzt, $|\sin(1/x)| \leq 1$ und $x \to 0$. Der Grenzwert ist 0.

2. a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,\ a_n = \frac{n}{(n+1)e^n} > 0.$$

Methode 1: Als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)e^n} = 0$$

und $a_{n+1} < a_n$, es folgt nach dem Leibnitzkriterium (a_n ist monoton und konvergiert gegen 0), dass $\sum_n (-1)^n a_n$ konvergiert.

Methode 2: Diese Reihe konvergiert sogar absolut, i.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Um die Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ zu untersuchen benuzten wir das Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)e^{n+1}}}{\frac{n}{(n+1)e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)e} = \frac{1}{e} < 1.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,\ a_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}} > 0.$$

Bitte wenden!

Methode 1: $a_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$. Offensichtlich ist $a_{n+1} = \frac{8}{9}a_n < a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Es folgt nach dem Leibnitzkriterium dass $\sum\limits_n (-1)^n a_n$ konvergiert.

Methode 2: Diese Reihe ist auch absolut konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1.$$

Methode 3: Um die Konvergenz von $\sum\limits_n \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ zu beweisen können wir auch das Wurzelkriterium benutzen.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{8}{9})^n} = \frac{8}{9} < 1$$

Darus folgt, dass die Reihe $\sum\limits_n \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ konvergiert.

c) Nach dem Quotientenkriterium ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{(n+1)^3} = 3 > 1.$$

Diese Reihe ist divergent!

d) Nach dem Quotientenkriterium haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\sqrt{5}-1)^{n+1}}{(1+n)^2+1}}{\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(\sqrt{5}-1)}{(n+1)^2+1} = \sqrt{5}-1 > 1.$$

Diese Reihe ist divergent!

3. a) **Methode 1:** Die funktion unter dem Integral $f(x) = \frac{\ln(x)}{x+a}$ konvergiert gegen 0 ($x \to \infty$), aber nicht schnell genug. Bemebrken Sie, dass

$$\frac{\ln(x)}{x+a} \geq \frac{1}{x+a}, \quad x \geq e.$$

Daraus folgt

$$\int\limits_e^\infty \frac{\ln(x)}{x+a}dx \geq \int\limits_e^\infty \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a)|_e^\infty = \infty.$$

Also, das Integral $\int\limits_e^\infty \frac{\ln(x)}{x+a}dx$ divergiert.

Methode 2: Der folgende Satz gilt:
Sei $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x) = A$. Dann

i) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergiert falls $p > 1$ und A ist endlich.

ii) $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ divergiert falls $p \leq 1$ und $A \neq 0$. (A kann auch unedlich sein)

Siehe nächstes Blatt!

Bemerken Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{\ln(x)}{x+a} = \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty.$$

Nach dem erwähnten Satz $A = \infty, p = 1$ folgt, dass uneigentliches Integral divergiert.
Methode 3: für $x \geq a$ ist $\frac{\ln(x)}{x+a} \geq \frac{\ln(x)}{2x}$ und

$$\int\limits_a^\infty \frac{\ln(x)}{2x}dx = \int\limits_{\ln(a)}^\infty \frac{1}{2}tdt = \frac{t^2}{4}\Big|_{\ln(a)}^\infty = \infty$$

b)

$$\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx + \int_\pi^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = I_1 + I_2.$$

Nach der Regel von l'Hopital ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$. Die Funktion $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ ist stetig ergänzbar in 0 und damit stetig auf dem Interval $[0, \pi]$. Deswegen konvergiert I_1. Die konvergenz von I_2 lässt sich auf verschidene Arten beweisen.
Methode 1: Bemerken Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\Big(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\Big) = 0$$

daraus folgt nach dem erwähnten Satz ($A = 0, p = 3/2$) dass I_2 konvergiert.
Methode 2: Das Integral I_2 ist sogar absolut konvergent,d.h. $\int_\pi^\infty |\frac{1-\cos(x)}{x^2}|dx < \infty$. Wir haben $|\frac{1-\cos(x)}{x^2}| \leq \frac{2}{x^2}$ und das Integral

$$\int_\pi^\infty \frac{2}{x^2}dx < \infty.$$

Jedes absolut konvergt integral ist konvergent.

c) Sei $x = -y$. Mit dieser Supstitution haben wir $I = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}dx = -\int\limits_1^\infty \frac{e^{-y}}{y}dy$.

Methode 1: $\frac{e^{-y}}{y} \leq e^{-y}$ für $y \geq 1$ und das Integral $\int\limits_1^\infty e^{-y}dy$ konvergiert. Deswegen konvergiert auch das gegebene Integral.
Methode 2: $\lim\limits_{y\to\infty} y^2\frac{e^{-y}}{y} = \lim\limits_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$. Nach dem erwähnten Satz (mit $p = 2, A = 0$) konvergiert das gegebene Integral.

d) Wir schreiben

$$I = \int\limits_{-\infty}^0 \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx + \int_0^\infty \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx = I_1 + I_2.$$

Mit der Supstitution $x = -y$ das erste Integral I_1 wird $I_1 = -\int_0^\infty \frac{y^3-y^2}{y^6+1}dy$. Da $\lim\limits_{y\to\infty} y^3\frac{y^3-y^2}{y^6+1} = 1$, dieses Integral konvergiert. Da $\lim\limits_{y\to\infty} x^3\frac{x^3+x^2}{x^6+1} = 1$ es folg dass I_2 konvergiert. Also, das gegebene Integral I konvergiert.

4. a) Wir benutzen die Kettenregel und Quotientenregel:

$$f_x = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x-y)}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{x^2+y^2-x(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^2+xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f_y = \frac{-\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x-y)}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{-(x^2+y^2)-y(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-(x^2+xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

b) Wir benutzen Produktregel und Kettenregel:

$$f_x = 2xy\cos(x^2y)\cos(xy^2) - y^2\sin(xy^2)\sin(x^2y)$$
$$f_y = x^2\cos(x^2y)\cos(xy^2) - 2xy\sin(x^2y)\sin(xy^2).$$

5. a) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung. Es gilt

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3),$$

desegen schreiben wir

$$\frac{x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{cases} 0 = A+B+C, \\ 1 = -5A-3B-2C \\ 1 = 6A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1/6+B+C \\ 1 = -5/6-3B-2C \\ A = 1/6. \end{cases}$$

desegen gilt $A = 1/6, B = -3/2, C = 4/3$. Damit ist

$$I = \int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-3}$$
$$= \frac{1}{6}\ln(x) - \frac{3}{2}\ln(x-2) + \frac{4}{3}\ln(x-3) + c.$$

b) Wir benutzen die Substritution $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)dt$, somit ist $arcsin(x) = t$.

$$\int \frac{arcsin(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{t^2}{\cos(t)}\cos(t)dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{arcsin(x)^3}{3} + c$$

6. Es sei das Vektorfeld $K\binom{x}{y} = \binom{P}{Q}$ harmonisch. Das um den Winkel α gedrehte Vektorfeld K_α hat die Komponenten

$$K_\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot P - \sin\alpha\cdot Q \\ \sin\alpha\cdot P + \cos\alpha\cdot Q \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Divergenz von K_α berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\operatorname{div} K_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x}(\cos\alpha \cdot P - \sin\alpha \cdot Q) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin\alpha \cdot P + \cos\alpha \cdot Q)\\ &= \cos\alpha \cdot (P_x + Q_y) - \sin\alpha \cdot (Q_x - P_y)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da K harmonisch ist. Analog berechnet sich die Rotation von K_α zu

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} K_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x}(\sin\alpha \cdot P + \cos\alpha \cdot Q) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos\alpha \cdot P - \sin\alpha \cdot Q)\\ &= \cos\alpha \cdot (Q_x - P_y) + \sin\alpha \cdot (P_x + Q_y)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Folglich ist das gedrehte Vektorfeld K_α ebenfalls harmonisch.

7. a) Wir bilden auf beiden Seiten der $\mathbf{rot}(\mathbf{B})$–Gleichung die Divergenz, vertauschen diese beim elektrischen Feld mit der Zeitableitung und setzen die $\operatorname{div}(\mathbf{E})$–Gleichung ein:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{B})) \;&=\; \operatorname{div}\left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + \frac{1}{c}\,\partial_t\,\mathbf{E}\right) = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}(\mathbf{J}) + \frac{1}{c}\,\partial_t \operatorname{div}(\mathbf{E})\\ &=\; \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}(\mathbf{J}) + \frac{4\pi}{c}\,\partial_t\varrho\end{aligned}$$

Aus $\operatorname{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{B})) = 0$ folgt

$$\partial_t\varrho + \operatorname{div}(\mathbf{J}) = 0.$$

b) Um zu zeigen, dass die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\varrho + \operatorname{div}(\mathbf{J}) = 0$ äquivalent ist zur Erhaltung der elektrischen Ladung, betrachten wir einen kompakten Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ mit Randfläche ∂B. Die totale elektrische Ladung, welche sich innerhalb von B befindet ist

$$Q_B = \int_B \varrho\, dB.$$

Für die Veränderung der totalen elektrischen Ladung innerhalb von B pro Zeiteinheit erhalten wir daraus

$$\dot{Q}_B = \frac{d}{dt}\int_B \varrho\, dB = \int_B \partial_t\varrho\, dB.$$

Es sei $\mathbf{N}$ das äussere Normalenvektorfeld an die Randfläche ∂B. Die elektrische Ladung, welche pro Zeiteinheit durch die Randfläche ∂B fliesst ist gegeben durch

$$\Phi_{\partial B} = \oint_{\partial B} \langle \mathbf{J}, \mathbf{N}\rangle\, d\partial B = \int_B \operatorname{div}(\mathbf{J})\, dB,$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Gauss verwendet haben. Erhaltung der elektrischen Ladung bedeutet definitionsgemäss

$$\dot{Q}_B + \Phi_{\partial B} = 0 \;\text{ für alle kompakten Bereiche }\; B \subset \mathbb{R}^3.$$

Aus dem Vorangegangen finden wir

$$\dot{Q} + \Phi_{\partial B} = \int_B \partial_t\varrho\, dB + \int_B \operatorname{div}(\mathbf{J})\, dB = \int_B \big[\,\partial_t\varrho + \operatorname{div}(\mathbf{J})\,\big]\, dB$$

Bitte wenden!

und es folgt, dass die Ladungserhaltung genau dann erfüllt ist, wenn obiger Integrand verschwindet, d.h. wenn die Kontinuitätsgleichung $\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\mathbf{J}) = 0$ gilt.

Bemerkung: Für einen fix gegebenen kompakten Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ könnte das Integral $\int_B \left[\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\mathbf{J}) \right] dB$ auch für einen von Null verschiedenen Integranden verschwinden. Da aber Erhaltung der Ladung definitionsgemäss bedeutet, dass für alle kompakten Bereiche $B \subset \mathbb{R}^3$ die Bedingung $\dot{Q}_B + \Phi_{\partial B} = 0$ gelten muss, folgt zwingend das Verschwinden des Integranden.

8. a) Nehmen wir an, dass eine Funktion $\tilde{v}$ existiert, die $\tilde{v}(r(t)) = v(t)$ erfüllt (Achtung: es ist a priori nicht klar und im Allgemeinen auch nicht der Fall, dass ein $\tilde{v}$ existiert, so dass die Beziehung für *alle* $t \geq 0$ gilt). Wegen $v = \frac{dr}{dt}$ und damit $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$, liefert die Kettenregel an der Stelle t dann

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_t = \left.\frac{d\tilde{v}}{dr}\right|_{r(t)} \cdot \left.\frac{dr}{dt}\right|_t = \tilde{v}\Big|_{r(t)} \left.\frac{d\tilde{v}}{dr}\right|_{r(t)}.$$

Aus dem Newtonschen Gesetz erhalten wir damit die Differentialgleichung

$$\tilde{v}\frac{d\tilde{v}}{dr} = -\frac{GM}{r^2}. \tag{1}$$

Indem wir beide Seiten nach r integrieren, die linke mit der Substitutionsregel, erhalten wir

$$\tilde{v}(r)^2 = \frac{2GM}{r} + C$$

mit einer Konstanten C. Weil die rechte Seite von (1) nie Null wird, hat $\tilde{v}(r)$ immer das gleiche Vorzeichen; da für uns wegen der Anfangsbedingung $\tilde{v}(R) = v_0 > 0$ nur die positive Lösung relevant ist, folgt

$$\tilde{v}(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r} + C}. \tag{2}$$

Die Konstante bestimmen wir mit $\tilde{v}(R) = v_0$ zu $C = v_0^2 - \frac{2GM}{R}$.

b) Die Lösung $\tilde{v}$ von (1) existiert und ist durch (2) gegeben, solange $2GM/r + C$ strikt positiv ist. Da $2GM/r$ wegen $r > 0$ immer strikt positiv ist, müssen wir nach dem Vorzeichen von C unterscheiden, das wiederum nur von v_0 abhängt: Es gilt $C \geq 0$ genau dann, wenn

$$v_0 \ \geq \ \sqrt{2GM/R} \ =: \ v_F$$

ist. In dem Fall ist $2GM/r + C$ für alle r strikt positiv und das maximale Existenzintervall damit $[R, \infty[$. Andernfalls ist $v_F < v_0$ und es gilt $\tilde{v}(r) \to 0$ für

$$r \to -\frac{2GM}{C} = -\frac{2GM}{v_0^2 - 2GM/R} =: R_{max}.$$

Das maximale Existenzintervall ist in dem Fall also $[R, R_{max}[$.

c) Die Formel (2) liefert die Gleichung

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{r} + C},$$

aus der nach Separieren der Variablen folgt

$$t = \int_R^r \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2GM + C\tilde{r}}} d\tilde{r}. \tag{3}$$

Siehe nächstes Blatt!

Für $C \geq 0$ erfüllt der Integrand die Ungleichungen

$$\sqrt{\frac{R}{2GM + CR}} \leq \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2GM + C\tilde{r}}} \leq \sqrt{\frac{r}{2GM}}\,;$$

aus der Monotonie des Integrals folgt daher

$$\sqrt{\frac{R}{2GM + CR}} \cdot r \leq t \leq \int_R^r \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2GM}} d\tilde{r} = \frac{r^{3/2} - R^{3/2}}{\sqrt{2GM}}.$$

Also ist $t \to \infty$ gleichbedeutend mit $r \to \infty$, und $v(t) = \tilde{v}(r(t))$ konvergiert gegen die Endgeschwindigkeit

$$v_{End} = \lim_{r \to \infty} \sqrt{\frac{2GM}{r} + C} = \sqrt{C} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM}{R}}.$$

d) Im Fall $C < 0$ hat der Nenner im Integral (3) eine Nullstelle bei $r = R_{max}$. Da der Integrand dort aber nur wie $(r - R_{max})^{-1/2}$ wächst, ist das Integral dann trotzdem endlich nach dem Majorantenkriterium. Also gibt es einen endlichen Zeitpunkt

$$t_{max} := \int_R^{R_{max}} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2GM + C\tilde{r}}} d\tilde{r},$$

in dem die Geschwindigkeit $v(t_{max}) = 0$ wird. Die Differentialgleichung für r als Funktion von t ergibt dort immer noch einen Sinn, und nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist ihre weitere Lösung allein durch die Anfangswerte $r(t_{max}) = R_{max}$ und $v(t_{max}) = 0$ bestimmt. Aus Symmetriegründen ist aber $t \mapsto r(2t_{max} - t)$ eine Lösung mit diesen Anfangswerten, und daher ist die eindeutige weitere Lösung auf $[t_{max}, 2t_{max}]$ gegeben durch $r(t) = r(2t_{max} - t)$. Das bedeutet, dass der Stein auf den Planeten zurückfällt und zum Zeitpunkt $2t_{max}$ dort aufschlägt.

e) Für $C = 0$ ist das Integral (3)

$$t = \frac{2(r^{3/2} - R^{3/2})}{3\sqrt{2GM}}.$$

Für $C \neq 0$ substituieren wir $x := \sqrt{1 + \frac{C}{2GM}\tilde{r}}$; dann gilt $\tilde{r} = \frac{2GM}{C}(x^2 - 1)$ und $d\tilde{r} = \frac{4GM}{C} x dx$, so dass wir

$$t(r) = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_R^r \sqrt{\frac{\tilde{r}}{1 + \frac{C}{2GM}\tilde{r}}}\, d\tilde{r} = \frac{4GM}{C^{3/2}} \int_{x(R)}^{x(r)} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

erhalten. Eine Stammfunktion von $\sqrt{x^2 - 1}$ ist $\frac{1}{4}(\sinh(2 \operatorname{arcosh} x) - 2 \operatorname{arcosh} x)$ (das findet man mit der Substitution $x = \cosh y$), so dass weiter

$$t = \frac{4GM}{C^{3/2}} \Big(\sinh(2 \operatorname{arcosh} x) - 2 \operatorname{arcosh} x \Big) \Big|_{x(R)}^{x(r)}$$

folgt. Indem man die Grenzen einsetzt erhält man eine unschöne Formel für t in Abhängigkeit von r, aber es gibt, ausser im Fall $C = 0$, keine explizite Formel für die Umkehrfunktion von $r \mapsto t(r)$. Für die Fragen (b) bis (d) brächte das sowieso nichts, weil es dort nicht um die Abhängigkeit von t geht; gerade deshalb war es ja günstig, die Geschwindigkeit als Funktion von r aufzufassen.

Bitte wenden!

9. Damit die Differentialgleichung wohldefiniert ist, müssen $x > 0$ und $y > 0$ sein. Somit können wir sie wie folgt umformen (Separation der Variablen):

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{y' \log y}{y}$$

Integrieren gibt

$$\int_0^x \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{y'(t)\log(y(t))}{y(t)}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Zur Auswertung des linken Integrals in (1) substituieren wir $z = \sqrt{t}$ und erhalten:

$$\int_0^{\sqrt{x}} 2z\frac{1-z}{1+z}\,\mathrm{d}z$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{(-z^2+z)}{(1+z)} &= -z+2-\frac{2}{1+z}, \quad \text{also} \\
2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{-z^2+z}{1+z}\,\mathrm{d}z &= 2\left(-\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{\sqrt{x}} + 2z\Big|_0^{\sqrt{x}} - 2\log(1+z)\Big|_0^{\sqrt{x}}\right) \\
&= -x+4\sqrt{x}-4\log\left(1+\sqrt{x}\right)
\end{aligned}$$

Das rechte Integral in (1) hingegen gibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{2}\left[\log^2(y(t))\right]'\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\log^2(y(t))\Big|_0^x \\
&= \frac{1}{2}\log^2(y(x)) - \frac{1}{2}\log^2(y(0)) \\
&= \frac{1}{2}\log^2(y(x)) - \frac{1}{2}\log^2 2
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log^2(y(x)) &= -x+4\sqrt{x}-4\log\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{2}\log^2 2 \\
\log(y(x)) &= \left(-2x+8\sqrt{x}-8\log\left(1+\sqrt{x}\right)+\log^2 2\right)^{\frac{1}{2}} \\
y(x) &= \exp\left(\left(-2x+8\sqrt{x}-8\log\left(1+\sqrt{x}\right)+\log^2 2\right)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

10. **a)** Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 4$ hat die beiden verschiedenen Nullstellen $\lambda = \pm 2$; die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet darum

$$y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}.$$

Da auf der rechten Seite der inhomogenen Gleichung die Werte ± 2 nicht als Koeffizient von x im Exponenten auftreten, können wir die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Siehe nächstes Blatt!

durch den folgenden Ansatz finden:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= (a+bx)e^{-x} \\
y_p'(x) &= be^{-x} - (a+bx)e^{-x} \\
y_p''(x) &= -be^{-x} - be^{-x} + (a+bx)e^{-x} \\
\Rightarrow \quad y_p'' - 4y_p &= -2be^{-x} + (a+bx)e^{-x} - 4(a+bx)e^{-x} \\
&= (-2b - 3a - 3bx)e^{-x}
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir, dass dies gleich xe^{-x} ist genau für $b = -\frac{1}{3}$ und $a = \frac{2}{9}$. Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_p(x) = \left(\frac{2}{9} - \frac{x}{3}\right)e^{-x} ,$$

und die allgemeine Lösung daher

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + (\tfrac{2}{9} - \tfrac{x}{3})e^{-x}} \quad .$$

b) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$ sind $\lambda_{1,2} = -1, 0$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist daher gegeben durch

$$y_h(x) = Ae^{-x} + B.$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir einen Ansatz:

Da 0 eine Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, führt der Term x auf der rechten Seite zum Ansatz $ax^2 + bx$, und da $\pm i$ keine Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, führt der Term $\cos x$ zum Ansatz $\alpha \cos x + \beta \sin x$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= ax^2 + bx + \alpha \cos x + \beta \sin x \\
y_p'(x) &= 2ax + b - \alpha \sin x + \beta \cos x \\
y_p''(x) &= 2a - \alpha \cos x - \beta \sin x \\
\Rightarrow \quad y_p''(x) + y_p'(x) &= 2a + b + 2ax + (\beta - \alpha)\cos x - (\alpha + \beta)\sin x \overset{!}{=} x + \cos x
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Bedingungen

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a + b &=& 0 \\ 2a &=& 1 \\ \beta - \alpha &=& 1 \\ \alpha + \beta &=& 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& \frac{1}{2} \\ b &=& -1 \\ \alpha &=& -\frac{1}{2} \\ \beta &=& \frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x),$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + B + \tfrac{1}{2}(x^2 - 2x + \sin x - \cos x)} \quad .$$

11. Da die Funktion

$$f(x, u) = \cos ux \cdot \frac{x + u}{x^2 + x + 1}$$

Bitte wenden!

sowie ihre partielle Ableitung $f_u(x,u)$ für alle $x, u \in \mathbb{R}$ stetig sind, können wir die Ableitung nach dem Parameter u mit dem Integral vertauschen:

$$\begin{aligned} G'(u) &= \frac{d}{du}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos ux \cdot \frac{x+u}{x^2+x+1}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\cos ux \cdot \frac{x+u}{x^2+x+1}\right) dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-x\sin ux \cdot \frac{x+u}{x^2+x+1} + \cos ux \cdot \frac{1}{x^2+x+1}\right) dx \\ \Rightarrow G'(0) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx. \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$[c\arctan(ax+b)]' = \frac{ac}{a^2x^2+2abx^2+b^2+1} = \frac{1}{\frac{a}{c}x^2 + \frac{2b}{c}x + \frac{b^2+1}{ac}}.$$

Wir fordern, dass $\frac{a}{c}=1$, $\frac{2b}{c}=1$ und $\frac{b^2+1}{ac}=1$. Dann folgt $a=c$, $b=\frac{c}{2}$ und $c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Somit ist

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{x^2+x+1}$ (da der Arcustangens eine ungerade Funktion ist, erhalten wir für beide Vorzeichen von c dieselbe Funktion). Es folgt

$$G'(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

12. **a)** Wir berechnen

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$$

b) f ist bijektiv als Verkettung der bijektiven Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^2 \to]0,\infty[\times]0,\infty[,\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^a \\ e^b \end{pmatrix}.$$

Um die Umkehrfunktion f^{-1} zu bestimmen müssen wir das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} e^{x+y} &= u \\ e^{x-y} &= v \end{aligned}\right\}$$

lösen. Dies ist äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} x+y &= \ln(u) \\ x-y &= \ln(v) \end{aligned}\right\}$$

Addieren der beiden Gleichungen und Division durch 2 liefert

$$x = \frac{1}{2}\ln(uv).$$

Analog ergibt subtrahieren der zweiten Gleichung von der ersten und Division durch 2

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{v}\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit folgt die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln(uv) \\ \ln\left(\frac{u}{v}\right) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$J_{f^{-1}}(u,v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & -\frac{1}{v} \end{pmatrix}$$

c) Zuletzt verifizieren wir

$$J_{f^{-1}}(f(x,y))J_f(x,y) = \mathbb{1}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} J_{f^{-1}}(f(x,y))J_f(x,y) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-(x+y)} & e^{y-x} \\ e^{-(x+y)} & -e^{y-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

13. Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(3y - 3x^2, 3x - 3y^2\right).$$

Daher ist (x,y) ein kritischer Punkt der Funktion f genau dann, wenn gilt

$$\left\{ \begin{array}{c} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = x^2 \\ x = x^4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = x^2 \\ x \cdot (1 - x^3) = 0 \end{array} \right\}.$$

Dies ergibt als kritische Punkte $(x,y) = (0{,}0)$ und $(x,y) = (1{,}1)$. Die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen ist

$$\mathrm{H}_f = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

Im kritischen Punkt $(0{,}0)$ ist sie also gleich

$$\mathrm{H}_f(0{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Determinante $0 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = -9 < 0$. Da die Determinante das Produkt der beiden Eigenwerte ist, muss ein Eigenwert positiv, der andere negativ sein. Folglich ist die Matrix $\mathrm{H}_f(0{,}0)$ *indefinit* und der kritische Punkt $(0{,}0)$ ein *Sattelpunkt*.
Im kritischen Punkt $(1{,}1)$ ist die Hesse-Matrix gleich

$$\mathrm{H}_f(1{,}1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

mit Determinante $(-6) \cdot (-6) - 3 \cdot 3 = 27 > 0$. Da die Determinante das Produkt der beiden Eigenwerte ist, sind daher entweder beide Eigenwerte positiv oder beide negativ. Die Matrix $\mathrm{H}_f(1{,}1)$ ist also definit. Da der linke obere Eintrag der Matrix negativ ist, kann sie nicht positiv definit sein, ist also *negativ definit.* Folglich ist der kritische Punkt $(1{,}1)$ ein *lokales Maximum.*

Bitte wenden!

14. Potentielle Extremalstellen im Innern von $\mathcal{D}$

müssen *kritische Punkte* von f sein, das heisst, es muss gelten:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = 10x - 2y - 8 = 0 \\ f_y = 4y - 2x - 2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right\}.$$

Der so erhaltene Punkt $P_1 = (1,1)$ liegt tatsächlich im Inneren des Bereichs $\mathcal{D}$, ist also der erste Kandidat.

Potentielle Extremalstellen auf der Randkurve $x = 0$ von $\mathcal{D}$:

Parametrisierung der Kurve durch $P\colon t \mapsto (0,t)$ mit $0 < t < 3$.
Zu ermitteln sind kritische Punkte der Funktion

$$t \mapsto f(0,t) = 5 \cdot 0^2 + 2t^2 - 2 \cdot 0 \cdot t - 8 \cdot 0 - 2t + 3 = 2t^2 - 2t + 3$$

Deren Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(0,t) = 4t - 2$ verschwindet genau für $t = \frac{1}{2}$.
Der Punkt $P_2 = (0, \frac{1}{2})$ ist wegen $0 < \frac{1}{2} < 3$ wirklich auf dem untersuchten Bereich des Randes von $\mathcal{D}$ enthalten und ist damit der nächste Kandidat.

Potentielle Extremalstellen auf der Randkurve $y = 0$ von $\mathcal{D}$:

Parametrisierung: $P\colon t \mapsto (t,0)$ mit $0 < t < 3$.
Zu ermitteln sind kritische Punkte der Funktion

$$t \mapsto f(t,0) = 5t^2 + 2 \cdot 0^2 - 2t \cdot 0 - 8t - 2 \cdot 0 + 3 = 5t^2 - 8t + 3$$

Deren Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t,0) = 10t - 8$ verschwindet genau für $t = \frac{4}{5}$.

Der so ermittelte dritte Kandidat $P_3 = (\frac{4}{5}, 0)$ liegt wegen $0 < \frac{4}{5} < 3$ auch innerhalb des untersuchten Randstücks von $\mathcal{D}$.

Potentielle Extremalstellen auf der Randkurve $x = 0$ von $\mathcal{D}$:

Parametrisierung der Kurve durch $P\colon t \mapsto (t, 3-t)$ mit $0 < t < 3$.
Gesucht sind kritische Punkte t der Funktion

$$t \;\mapsto\; f(t, 3-t) = 5t^2 + 2(3-t)^2 - 2t(3-t) - 8t - 2(3-t) + 3 = 9t^2 - 24t + 15$$

Deren Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, 3-t) = 18t - 24$ verschwindet genau für $t = \frac{4}{3}$.
Der vierte Kandidat ist also $P_4 = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Auch dieser Punkt liegt wegen $\frac{4}{3} > 0$ und $\frac{5}{3} > 0$ auf dem untersuchten Randstück von $\mathcal{D}$.

Weitere potentielle Extremalstellen von f sind die Eckpunkte von $\mathcal{D}$: $P_5 = (0,0)$, $P_6 = (0,3)$ und $P_7 = (3,0)$.

Die **Werte von f in den gefundenen Punkten** sind

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
$(1,1)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{4}{5}, 0)$	$(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$	$(0,0)$	$(0,3)$	$(3,0)$
-2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{5}$	-1	3	15	24

Der grösste dieser Werte ist $f(3,0) = 24$ und ist somit das Maximum von f auf $\mathcal{D}$. Der kleinste dieser Werte ist $f(1,1) = -2$ und somit das Minimum.

15. Die durch die Gleichungen $F = G = 0$ definierte Kurve ist eine *kompakte* Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, denn sie ist *abgeschlossen* (als Lösungsmenge von Gleichungen, die aus stetigen Funktionen F und G gebildet werden) und sie ist wegen der Bedingung $F = 0$ in einer Sphäre enthalten und

Siehe nächstes Blatt!

damit auch *beschränkt*. Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie auf der Kurve ein Maximum an.

Dieses Maximum muss in einem bedingten kritischen Punkt liegen (weil alle beteiligten Funktionen f, F, G differenzierbar sind), d. .h. in einem Punkt, in dem die Gradienten ∇f, ∇F und ∇G *linear abhängig* sind. An diesem Punkt (x, y, z) existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\nabla f = \lambda \nabla F + \mu \nabla G.$$

Hieraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} F &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ G &= x^3 + y^3 + z^3 &= 0 \\ 1 &= \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 3x^2 \\ 0 &= \lambda \cdot 2y + \mu \cdot 3y^2 \\ 0 &= \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 3z^2. \end{cases}$$

Fall 1: $\boxed{y = 0}$ Die zweite Gleichung des Systems besagt dann $x^3 + z^3 = 0$, woraus $z = -x$ folgt. Aus der ersten Gleichung folgt dann weiter

$$2x^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Fall 2: $\boxed{z = 0}$ Es folgt analog zum Fall 1 $y = -x$ und $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Fall 3: $\boxed{y \neq 0 \text{ und } z \neq 0}$ Wäre dann $\mu = 0$, so würde aus der letzten Gleichung folgen $\lambda = 0$, was der mittleren Gleichung widerspricht. Also ist $\mu \neq 0$. Die zwei letzten Gleichungen des System liefern dann

$$y = z = -\tfrac{2\lambda}{3\mu}.$$

In die zweite Gleichung eingesetzt erhalten wir

$$x^3 + 2y^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = z = -\tfrac{x}{\sqrt[3]{2}}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert nun

$$x^2 + 2 \cdot \tfrac{x^2}{2^{2/3}} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm \tfrac{1}{\sqrt{1 + 2^{1/3}}}.$$

Die möglichen Kandidaten für das Maximum von $f(x, y, z) = x$ sind nun offensichtlich diejenigen (x, y, z), für die x positives Vorzeichen hat, also in den jeweiligen Fällen

$$x = +\tfrac{1}{\sqrt{2}},\; +\tfrac{1}{\sqrt{2}},\; +\tfrac{1}{\sqrt{1+2^{1/3}}}.$$

Aus $1 < 2^{1/3}$ folgt aber

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}} > \tfrac{1}{\sqrt{1+2^{1/3}}}.$$

Somit ist das gesuchte Maximum gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$, und es wird genau in den beiden Punkten $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ angenommen.

16. Der **naive und rechenintensivere Lösungsweg** besteht darin, alle partiellen Ableitungen vom Grad ≤ 2 der Funktion zu berechnen und in die Formel

$$\begin{aligned} &f(1{,}1) + f_x(1{,}1) \cdot (x-1) + f_y(1{,}1) \cdot (y-1) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} f_{xx}(1{,}1) \cdot (x-1)^2 + f_{xy}(1{,}1) \cdot (x-1)(y-1) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(1{,}1) \cdot (y-1)^2 \end{aligned}$$

Bitte wenden!

für die Taylorapproximation zweiten Grades von f im Punkt (1,1) einzusetzen:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \arctan(xy-x-y) & f(1{,}1) &= \arctan(1) = \tfrac{\pi}{4}\\
f_x(x,y) &= \tfrac{y-1}{1+(xy-x-y)^2} & f_x(1{,}1) &= 0\\
f_y(x,y) &= \tfrac{x-1}{1+(xy-x-y)^2} & f_y(1{,}1) &= 0\\
f_{xx}(x,y) &= -\tfrac{2(y-1)^2(xy-x-y)}{(1+(xy-x-y)^2)^2} & f_{xx}(1{,}1) &= 0\\
f_{xy}(x,y) &= \tfrac{1}{1+(xy-x-y)^2} - \tfrac{2(x-1)(y-1)(xy-x-y)}{(1+(xy-x-y)^2)^2} & f_{xy}(1{,}1) &= \tfrac{1}{2}\\
f_{yy}(x,y) &= \tfrac{-2(x-1)^2(xy-x-y)}{(1+(xy-x-y)^2)^2} & f_{yy}(1{,}1) &= 0
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)(y-1)$

Stattdessen kann man aber auch die Taylorapproximation der Polynomfunktion $(x,y) \mapsto (xy-x-y)$ an der Stelle (1,1) in die Taylorapproximation der arctan-Funktion an der Stelle $f(1{,}1)$ einsetzen:

Taylorpolynom von $xy-x-y$ um den Punkte $(x,y) = (1{,}1)$:

$$
\begin{aligned}
&xy-x-y\\
&= \big((x-1)+1\big)\big((y-1)+1\big) - \big((x-1)+1\big) - \big((y-1)+1\big)\\
&= (x-1)(y-1)-1\\
&= -1+(x-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

Diese Funktion nimmt im Punkt (1,1) den Wert -1 an, weshalb wir für die Taylorapproximation der Funktion $f(x,y) = \arctan(xy-x-y)$ die Taylorapproximation der Funktion arctan *im Punkt* -1 benötigen. Da in der Taylorapproximation von $(xy-x-y)$ keine linearen Terme auftauchen, benötigen wir vom arctan *nur* die Taylorapproximation *vom Grad 1*:

$$
\begin{aligned}
\arctan(t) &= \arctan(-1) + \arctan'(-1)\cdot(t+1) + O\big((t+1)^2\big)\\
&= -\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(t+1) + O\big((t+1)^2\big)
\end{aligned}
$$

Setzt man in diese Taylorapproximation den Wert

$$t := -1 + (x-1)(y-1)$$

ein, so erhält man:

$$(t+1) = (x-1)(y-1)\,,$$

$O\big((t+1)^2\big)$ enthält nur Terme der Ordnung ≥ 4 in $(x-1)$ und $(y-1)$, und die Taylorapproximation zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = \arctan(2x^2+3xy-4y^2)$$

im Punkt (1,1) lautet somit:

$$\underline{\underline{-\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1)(y-1)}}$$

Siehe nächstes Blatt!

17. a)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 x\cos y \; dx\, dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(\cos y - y\cos y)\; dy =$$

$$\frac{1}{2}\left([\sin y]_0^1 - [y \sin y]_0^1 + \int_0^1 \sin x \; dx \right) =$$

$$\frac{1}{2}\left([\sin y]_0^1 - [y \sin y]_0^1 - [\cos x]_0^1 \right) = \frac{1}{2}(\sin 1 - \sin 1 - \cos 1 + 1) = 1/2 - (\cos 1)/2.$$

Hier ist der Integrationsbereich der Bereich zwischen dem Graphen der Wurzelfunktion $x = \sqrt{y}$ und der Achse $x = 1$. Dreht man die Integration um, erhält man den Bereich zwischen x-Achse (die ist durch $y = 0$ beschreibt) und einer Parabel $y = x^2$, also

$$\int_0^1 x \int_0^{x^2} \cos y \; dx\, dy = \int_0^1 x\sin(x^2)\; dy = -\frac{1}{2}[\cos(x^2)]_0^1 = -\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}.$$

b) Es gilt $y = 2 - x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{2-y}$ und weiter

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\, dy\, dx &= \int_{-2}^1 \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{\max(-y,-\sqrt{2-y})}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \leq \pi, \; x \geq y\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0,\pi], \; x \leq y \leq \pi\}, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \int_D \cos(x+y)\; d\mu(x,y) &= \int_0^\pi \int_0^y \cos(x+y)\; dx\; dy \\ &= \int_0^\pi \int_y^{2y} \cos(z)\; dz\; dy \quad (\text{wobei } z = x+y, \; dz = dx) \\ &= \int_0^\pi (\sin(2y) - \sin(y))dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(w)dw - \int_0^\pi \sin(y)dy \quad (\text{wobei } w = 2y, \; dw = 2dy) \\ &= \frac{1}{2}(-\cos(2\pi) + \cos(0)) - (-\cos(\pi) + \cos(0)) \\ &= -2. \end{aligned}$$

18. Trägheitsmoment eines Körpers B bezüglich einer Achse

$$\Theta_{\text{Achse}} = \int_B (\text{senkrechter Abstand zur Achse})^2 \cdot (\text{Dichte})\; dV\,.$$

Bitte wenden!

Zylinderkoordinaten um die x-Achse: (r, φ, x)

$$\begin{aligned}
x &= x \\
y &= r\cos\varphi \\
z &= r\sin\varphi \qquad (r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)) \\
\text{Volumenelement } dV &= r\,d\mu(x, r, \varphi) \ = \ r\,dr\,d\varphi\,dx \\
\text{Abstand zur } x\text{-Achse} &= y^2 + z^2 \ = \ r^2 \\
\Rightarrow \ \text{Trägheitsmoment } \Theta_x &= \int_B r^2 \cdot \varrho\, r\,d\mu(x, r, \varphi)\,.
\end{aligned}$$

Integrationsgrenzen:

- $0 \le \varphi \le 2\pi$,
- $0 \le r \le y(x) = (4-x)\sqrt{2x}$,
- $0 \le x \le 4$ (Nullstellen der Funktion $y(x)$).

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Theta_x &= \int_0^4 \int_0^{(4-x)\sqrt{2x}} \int_0^{2\pi} \varrho r^3\,d\varphi\,dr\,dx \\
&= 2\pi\varrho \int_0^4 \int_0^{(4-x)\sqrt{2x}} r^3\,dr\,dx \\
&= 2\pi\varrho \int_0^4 \left[\frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_{r=0}^{(4-x)\sqrt{2x}} dx \\
&= 2\pi\varrho \int_0^4 (4-x)^4 \cdot x^2\,dx
\end{aligned}$$

Integrand auflösen (mit Binomischem Satz) und integrieren

$$\begin{aligned}
\int_0^4 (4-x)^4 \cdot x^2\,dx &= \int_0^4 (4^4 - 4\cdot 4^3 x + 6\cdot 4^2 x^2 - 4\cdot 4x^3 + x^4)\cdot x^2\,dx \\
&= \int_0^4 4^4 x^2 - 4^4 x^3 + 6\cdot 4^2 x^4 - 4^2 x^5 + x^6\,dx \\
&= \left[\frac{4^4}{3}x^3 - 4^3 x^4 + \frac{6\cdot 4^2}{5}x^5 - \frac{4^2}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7\right]\Bigg|_{x=0}^{4} \\
&= \frac{4^7}{3} - 4^7 + \frac{6\cdot 4^7}{5} - \frac{4^8}{6} + \frac{4^7}{7} \\
&= 4^7 \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{6}{5} - \frac{4}{6} + \frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{4^7}{105} \ = \ \frac{16384}{105}\,.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Theta_x = 2\pi\varrho \cdot \frac{4^7}{105}}$$

Siehe nächstes Blatt!

19. **a)** Sei f ein Potential zu K. Aus $f_x\binom{x}{y} = P\binom{x}{y} = x^2 - 2y^3$ folgt durch Integration nach x, dass

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int (x^2 - 2y^3)\, dx = \frac{1}{3}x^3 - 2xy^3 + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ von y, aber keinesfalls von x, abhängen darf. Durch Ableiten dieser Gleichung nach y erhalten wir

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6xy^2 + g'(y).$$

Zusammen mit der Gleichung

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 5y,$$

schliessen wir daraus, dass gilt $g'(y) = 6xy^2 + x + 5y$ und mit dem unbestimmten Integral

$$g(y) = 2xy^3 + xy + \frac{5}{2}y^2 + c$$

für eine Konstante c. Dies ist ein Widerspruch, da die Funktion g nur von y abhängen darf. Folglich existiert kein Potential.
Aliter: Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$,

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^3 \\ x + 5y \end{pmatrix},$$

gilt $P_y - Q_x = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -6y^2 - 1 \neq 0$. Folglich ist K nicht wirbelfrei und besitzt daher kein Potential.

b) Sei f ein Potential zu K. Aus $f_x\binom{x}{y} = P\binom{x}{y} = y^2 + 5$ folgt dann mit dem unbestimmten Integral

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int (y^2 + 5)\, dx = (y^2 + 5)x + g(y) = xy^2 + 5x + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ noch von y abhängen darf! Ableiten dieser Gleichung nach y liefert

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy + g'(y).$$

Andererseits gilt

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy - 8,$$

also $g'(y) = -8$ und somit $g(y) = -8y + c$ für eine Konstante c. Somit ist

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy^2 + 5x - 8y + c$$

ein Potential zu K.

Bemerkung: Da $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend ist, unterscheiden sich zwei beliebige Potentiale nur um eine konstante Funktion. Darum hat jedes Potential von K die genannte Gestalt.
Aliter: Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$,

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 5 \\ 2xy - 8 \end{pmatrix},$$

Bitte wenden!

gilt $P_y - Q_x = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 2y = 0$. Damit ist K wirbelfrei. Da ausserdem der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, besitzt K ein Potential. Daraus folgt, dass das Linienintegral

$$f(P) := \int_{P_0}^{P} K \cdot \mathrm{d}x$$

nicht von der Wahl eines Wegs von P_0 nach P abhängt, und definiert für jeden festen Anfangspunkt $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Potential zu K. Der Einfachheit halber wählen wir als Weg die gerade Strecke

$$\gamma \ : \ t \mapsto \begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]\,,$$

von $P_0 := \binom{0}{0}$ nach $P = \binom{x}{y}$. Das Potential f ergibt sich dann als

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_0^1 K(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 K\begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} y^2t^2 + 5 \\ 2xyt^2 - 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big[xy^2t^2 + 5x + 2xy^2t^2 - 8y \Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[xy^2t^3 + (5x - 8y)t \Big]_{t=0}^{1} \\
&= xy^2 + 5x - 8y\,.
\end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt in der Tat $\nabla f = K$.

20. **a)** Wir parametrisieren den Kreis mit einer Winkelkoordinate:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}(\gamma(t)) &= \begin{pmatrix} \frac{-2r\cos t \cdot r\sin t}{(r^2)^2} \\ \frac{r^2\cos^2 t - r^2\sin^2 t}{(r^2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -2\cos t \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) &= \tfrac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -2\cos t \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{r} \left(2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t - \cos t \sin^2 t \right) \\
&= \tfrac{1}{r} \cos t \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) \ = \ \tfrac{1}{r}\cos t.
\end{aligned}$$

Das Umlaufintegral berechnet sich also zu

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{r}\cos t\; dt \ = \ \tfrac{1}{r}\sin t\Big|_{t=0}^{2\pi} \ = \ 0\,.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Gesucht ist ein Potential von $\mathbf{K}$, d. h. eine Funktion $f(x,y)$ (auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) mit $\nabla f = \mathbf{K}$. Ausgeschrieben bedeutet diese Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,. \tag{6}$$

Wir lösen (5) durch (unbestimmte) Integration über x (y ist dabei eine Konstante):

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx \\
&= \int \frac{-y}{u^2}\,du \\
&\quad \text{mit der Substitution } u = u(x) := x^2+y^2,\ du = 2x\,dx \\
&= \frac{y}{u} + C(y) \\
f(x,y) &= \frac{y}{x^2+y^2} + C(y)\,.
\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$ in (6) ein:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y)}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) \\
&= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) \overset{(6)}{=} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\Rightarrow \qquad C'(y) &= 0 \\
C(y) &= \text{konstant} = C\,.
\end{aligned}$$

Ein Potential von $\mathbf{K}$ ist daher die Funktion

$$\frac{y}{x^2+y^2} + C\,,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist (z. B. $C = 0$). Das Feld $\mathbf{K}$ ist damit konservativ.

c)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{K} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&\qquad + \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (2xy)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot 4x + 2x(x^2+y^2) - (2xy)\cdot 4y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{4x\left((x^2+y^2)-(x^2-y^2)\right) - (2xy)\cdot 4y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{8xy^2 - 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = 0\,.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

21. **a)** Aus der folgenden Zeichnung für die Graphen von $y = x^2$ und $y = x^3$ folgt, dass es sich um das Gebiet

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x^2\}$$

handeln muss. Dessen Rand besteht aus den beiden (parametrisierten) Kurven

$$\begin{aligned}\gamma_1 \quad &: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1] \text{ und} \\ \gamma_2 \quad &: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]\,.\end{aligned}$$

Mit der Konvention, dass das Gebiet in Durchlaufrichtung links des Rands liegen soll, ist der totale Rand ∂B gleich der orientierten Kurve $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$. Es gilt daher:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{K}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{K}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{-\gamma_2} \mathbf{K}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{K}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\gamma_2} \mathbf{K}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_0^1 \mathbf{K}(\gamma_1(t))\cdot \gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathbf{K}(\gamma_2(t))\cdot \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - (t^3)^2 \\ 2t^3 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &\quad - \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - (t^2)^2 \\ 2t^2 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big[- t^6 + 6t^5 - 3t^3 + t^2 \Big]\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \Big[- t^4 + 4t^3 - t^2 \Big]\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t^7}{7} + t^6 + \frac{t^5}{5} - \frac{7t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= -\frac{11}{420}\,.\end{aligned}$$

b) Schreibe $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, dann gilt

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = -2y \qquad \text{und} \qquad Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1\,.$$

Mit dem Satz von Green folgt:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{K}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_B (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}\mu(x,y) \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (-1 + 2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (-y + y^2)\Big|_{x^3}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (-x^6 + x^4 + x^3 - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= -\frac{11}{420}\,,\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

was in der Tat dem Resultat aus a) entspricht.