Musterlösung 4

1. Der Ball wird in Richtung des geringsten Widerstandes rollen, d.h. in die Richtung, wo die Fläche $\mathcal{G}(f)$ den geringsten Widerstand aufweist Mit anderen Worten heisst das, dass der Ball in die Richtung $\vec{e}$ rollt, wo die Richtungsableitung $D_{\vec{e}}f$ minimal ist. Sei $\vec{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Wir berechnen

$$D_{\vec{e}}f = \nabla f(1,1) \cdot \vec{e} = 6\cos(\varphi) + 6\sin(\varphi).$$

Die bedingung für ein Minimum ist

$$\frac{d}{d\varphi} D_{\vec{e}}f = 6\left[\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\right] = 0.$$

Somit kommen als Richtungen

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$$

in Frage. Offensichtlich gilt

$$6\cos(\varphi_2) + 6\sin(\varphi_2) < 6\cos(\varphi_1) + 6\sin(\varphi_1)$$

Somit rollt der Ball in die Richtung $\vec{e} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ und in die Raumrichtung $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -6\sqrt{2})$.

2. Erinnern wir uns an den Satz von Schwarz
Die Funktion $f(x,y)$ besitze in $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x_0,y_0)$, $\partial_y f(x_0,y_0)$ und $\partial_{xy} f(x_0,y_0)$. Sind $\partial_x f$, $\partial_y f$ und $\partial_{xy} f$ stetig in (x_0,y_0), so existiert auch $\partial_{yx} f(x_0,y_0)$ und es gilt

$$\partial_{yx} f(x_0,y_0) = \partial_{xy} f(x_0,y_0).$$

Sei nun

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_x g(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)y^3 - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}; \\ \partial_y g(x,y) &= \frac{3y^2x(x^2+y^2) - 2x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Daraus berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_{xx} g(x,y) &= \frac{-2xy^3(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)\left[y^5 - x^2y^3\right]}{(x^2+y^2)^4} \\ \partial_{yy} g(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)^2\left[6yx^3 + 12y^3x - 8x^2y^3\right] - 4y(x^2+y^2)\left[3y^2x(x^2+y^2) - 2x^2y^4\right]}{(x^2+y^2)^4} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ folgt weiter mit Satz von Schwarz

$$\partial_{yx} g(x, y) = \partial_{xy} g(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2 \left[5y^4 - 3x^2y^2\right] - 4y(x^2 + y^2) \left[y^5 - x^2y^3\right]}{(x^2 + y^2)^4}.$$

Es bleibt der Punkt $(0, 0)$ zu untersuchen. Für $x = 0$ und $y \neq 0$ folgt

$$\partial_x g(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h, y) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{y^3}{h^2 + y^2} = y.$$

Für $(0, 0)$ folgt

$$\partial_x g(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = 0.$$

Zusammenfassend folgt also

$$\partial_x g(0, y) = y \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Sei nun umgekehrt $y = 0$ und x beliebig. Wir berechnen, falls $x \neq 0$

$$\partial_y g(x, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x, h) - g(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{xh^2}{x^2 + h^2} = 0$$

Im fall $x = 0$ folgt

$$\partial_y g(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(0, h) - g(0, 0)}{h} = 0.$$

Also folgt

$$\partial_y g(x, 0) = 0.$$

Berechnen wir nun die Ableitungen 2. Ordnung in $(0, 0)$ folgt sofort

$$\partial_{yx} g(0, 0) = 1 \neq 0 = \partial_{xy} g(0, 0).$$

3. Sei K der Kegel wie auf dem Bild unten. Wir berechen zuerst das Volemen des Kegels.

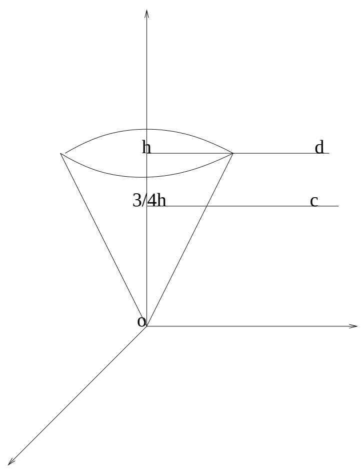

Abbildung 1: Kegel K

$$V = \iiint\limits_K dV = \iiint\limits_K dxdydz$$

Siehe nächstes Blatt!

Um das Volumen zu berechnen benutzen wir Zylindrische Koordinaten:

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi), \quad z = z$$

Die Grenze für r, φ und z sind $r \in [0,a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $z \in [\frac{h}{a}r, h]$. Die Jacobi Determinante der Zylindrischen Transformation ist $J = r$. Also, wir haben

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{hr/a}^h r dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^a \Big(hr - \frac{h}{a}r^2\Big) dr d\varphi$$
$$= \frac{1}{6}ha^2\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3}\pi h a^2.$$

a) Der Schwerpunkt des Kegels liegt auf der $z-$Achse. (Überprüfen sie das indem sie zeigen $\iiint\limits_K x dV = \iiint\limits_K y dV = 0$. Das folgt auch als der Kegel symetrisch bezüglich xz und yz Achse ist) Also, wir haben

$$M_{xy} = \iiint\limits_K z dV = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{hr/a}^h zr dz dr d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}\Big(h^2 r - \frac{h^2}{a^2}r^3\Big) dr d\varphi = \frac{1}{8}h^2a^2\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4}\pi h^2 a^2 \tag{1}$$

Dann $\bar{z} = M_{xy}/V = \frac{3}{4}h$ und der Scwerpunkt hat die Koordinaten $(0, 0, \frac{3}{4}h)$.

b) Das Trägheitsmoment bezüglich $z-$ Achse ist gegeben als

$$I_z = \iiint\limits_K \varrho(x,y,z)^2 dV = \iiint\limits_K (x^2+y^2) dx dy dz.$$

Wir berechen I_z wieder in Zylindrischen Koordianten

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{hr/a}^h r^2 r dz dr d\varphi = \frac{1}{10}\pi h a^4 = \frac{3}{10}a^2 V.$$

c) Sei die Gerade $y-$ Achse. Aus der Vorlesung ist bekannt dass

$$I_y = \iiint_K (x^2+z^2) dV = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{hr/a}^h (r^2\cos^2(\varphi) + z^2) r dz dr d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \Big((hr^3 - \frac{h}{a}r^4)\cos^2(\varphi) + \frac{1}{3}(h^3 r - \frac{h^3}{a^3}r^4)\Big) dr d\varphi$$
$$= \frac{1}{5}\pi h a^2 (h^2 + \frac{1}{4}a^2) = \frac{3}{5}(h^2 + \frac{1}{4}a^2)V.$$

d) Ist das Trägheitsmoment bezüglich einer Drehachse durch den Schwerpunkt bekannt, so kann mit dem Satz von Parallelachsen das Trägheitsmoment für alle Drehachsen, die parallel zu dieser sind, berechnet werden.
Satz von Parallelachsen: Sei c eine Drehachse die den Schwerpunk des Körpers K

Bitte wenden!

enthält. Sei d zur c parallele Drehachse mit dem Abstand ϱ von c. Dann erfüllen die Trägheitsmomente I_c und I_d die folgende Identität

$$I_d = I_c + m\varrho^2,$$

wo m die Masse des Körpers K bezeichnet.
Sei c die Linie die den Schwerpunkt enthält und zur $y-$ Achse parallel ist (wie auf der Abbildung 1)

$$I_y = I_c + V(\frac{3}{4}h)^2 \Rightarrow I_c = \frac{3}{5}(h^2 + \frac{1}{4}a^2)V - \frac{9}{16}h^2V = \frac{3}{80}(h^2 + 4a^2)V$$

e) Sei d der Durchmesser der Basis, der parallel zur $y-$Achse ist (wie auf der Abbildung 1). Dann haben wir

$$I_d = I_c + V(\frac{1}{4}h)^2 = \frac{3}{80}(h^2 + 4a^2)V + \frac{1}{16}h^2V = \frac{1}{20}(2h^2 + 3a^2)V$$

Frage 1

Sei $f(x,y) = (xy)^2$. Die partielle Ableitung $\partial_y f(x,y)$ ist

4. ○ $2xy$

○ $2xy^2$

√ ○ $2x^2y$

Die Funktion $f(x,y) = x^2y^2$ und die Ableitung nach y ist $\partial_y f(x,y) = 2yx^2$

5. Frage 2

Sei $f(x,y) := \frac{\sin(x^2\tan(y))}{1+x^2}$. Die partielle Ableitung $\partial_{xy} f$ ist

√ ○ $f_{xy} = \frac{2x}{(1+x^2)\cos^2(y)}\left[\cos(x^2\tan(y)) - x^2\tan(y)\sin(x^2\tan(y)) - \frac{\cos(x^2\tan(y))x^2}{(1+x^2)}\right]$

○ $f_{xy} = \frac{2x\left(-(1+x^2)\sin(x^2\tan(y)) - \cos(x^2\tan(y))\right)}{(1+x^2)^2}$

○ $f_{xy} = \frac{2x\left((1+x^2)\cos(x^2\tan(y)) - \sin(x^2\tan(y))\right)}{(1+x^2)^2}$

Die Funktion $f(x,y)$ ist stetig und ihre Ableitungen sind auch stetig. Wir berechnen für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2x\tan(y)(1+x^2)\cos(x^2\tan(y)) - 2x\sin(x^2\tan(y))}{(1+x^2)^2};$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{\cos(x^2\tan(y))(1+\tan^2(y))x^2}{1+x^2}.$$

Daraus folgt

$$\partial_{xy} f(x,y) = \frac{2x}{(1+x^2)\cos^2(y)}\left[\cos(x^2\tan(y)) - x^2\tan(y)\sin(x^2\tan(y)) - \frac{\cos(x^2\tan(y))x^2}{(1+x^2)}\right]$$