Musterlösung 7

1. Nach der Kettenregel haben wir:

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial(r,\varphi)}(r,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x(r,\varphi),y(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}(r,\varphi)\,.$$

Der Übersichtlichkeit halber lassen wir nun die Variablenabhängigkeit der Funktionen weg und rechnen:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_r &= f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi\,, \\ \widetilde{f}_\varphi &= -f_x r\sin\varphi + f_y r\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Wir können diese Gleichungen nach f_x und f_y auflösen und erhalten:

$$\begin{aligned} f_x &= \widetilde{f}_r\cos\varphi - \widetilde{f}_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\,, \\ f_y &= \widetilde{f}_r\sin\varphi + \widetilde{f}_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}\,. \end{aligned}$$

Nochmaliges Ableiten ergibt daher:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \tfrac{\partial}{\partial r}\left(\widetilde{f}_r\cos\varphi - \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\sin\varphi}{r}\right)\cos\varphi - \tfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\widetilde{f}_r\cos\varphi - \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\sin\varphi}{r}\right)\tfrac{\sin\varphi}{r} \\ &= \widetilde{f}_{rr}\cos^2\varphi - \widetilde{f}_{\varphi r}\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - \widetilde{f}_\varphi\tfrac{-\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \\ &\quad - \left(\widetilde{f}_{r\varphi}\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \widetilde{f}_r\tfrac{-\sin^2\varphi}{r} - \widetilde{f}_{\varphi\varphi}\tfrac{\sin^2\varphi}{r^2} - \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\right) \\ &= \widetilde{f}_{rr}\cos^2\varphi - \widetilde{f}_{\varphi r}\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \\ &\quad - \widetilde{f}_{r\varphi}\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \widetilde{f}_r\tfrac{\sin^2\varphi}{r} + \widetilde{f}_{\varphi\varphi}\tfrac{\sin^2\varphi}{r^2} + \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\,, \\ f_{yy} &= \tfrac{\partial}{\partial r}\left(\widetilde{f}_r\sin\varphi + \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\cos\varphi}{r}\right)\sin\varphi + \tfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\widetilde{f}_r\sin\varphi + \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\cos\varphi}{r}\right)\tfrac{\cos\varphi}{r} \\ &= \widetilde{f}_{rr}\sin^2\varphi + \widetilde{f}_{\varphi r}\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \widetilde{f}_\varphi\tfrac{-\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \\ &\quad + \left(\widetilde{f}_{r\varphi}\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \widetilde{f}_r\tfrac{\cos^2\varphi}{r} + \widetilde{f}_{\varphi\varphi}\tfrac{\cos^2\varphi}{r^2} + \widetilde{f}_\varphi\tfrac{-\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\right) \\ &= \widetilde{f}_{rr}\sin^2\varphi + \widetilde{f}_{\varphi r}\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \\ &\quad + \widetilde{f}_{r\varphi}\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \widetilde{f}_r\tfrac{\cos^2\varphi}{r} + \widetilde{f}_{\varphi\varphi}\tfrac{\cos^2\varphi}{r^2} - \widetilde{f}_\varphi\tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\,. \end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Grössen addieren, sehen wir sofort, dass sich einige Terme kürzen. Übrig bleiben nur:

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= \widetilde{f}_{rr}\cos^2\varphi + \widetilde{f}_r\tfrac{\sin^2\varphi}{r} + \widetilde{f}_{\varphi\varphi}\tfrac{\sin^2\varphi}{r^2} + \widetilde{f}_{rr}\sin^2\varphi + \widetilde{f}_r\tfrac{\cos^2\varphi}{r} + \widetilde{f}_{\varphi\varphi}\tfrac{\cos^2\varphi}{r^2} \\ &= \widetilde{f}_{rr} + \tfrac{1}{r}\widetilde{f}_r + \tfrac{1}{r^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}\,, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

2. Wir erinnern uns an das implizite Funktionentheorem
Sei $(x_0,y_0)\in L := \{(x,y)\in\Omega:\ f(x,y)=0\}$, so dass

$$\partial_y f(x_0,y_0)\neq 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung $U = I\times I'$ mit Zentrum (x_0,y_0) und eine differenzierbare Funktion

$$\phi:\ I\to I', \qquad x\mapsto y=\phi(x)$$

Bitte wenden!

mit $\mathcal{G}(\phi) = L \cap Q$. Weiter gilt

$$\phi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion $F(x, y) = e^y + y + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$ lauten

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= x - 1, \\ F_y(x, y) &= e^y + 1. \end{aligned}$$

a) Offensichtlich gilt überall $F_y > 0$, also insbesondere $F_y \neq 0$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 0$ in einer Umgebung jeder gegebenen Lösung (x_0, y_0) der Graph einer differenzierbaren Funktion $y = y(x)$ ist. Da $F(x, y)$ beliebig oft stetig differenzierbar ist, gilt dasselbe für diese Funktion $y(x)$.

b) Aus der Kettenregel können wir nun allgemein die Ableitungen von $y(x)$ berechnen:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{F_x}{F_y} \\ y'' &= \frac{-F_{xx}\, F_y^2 + 2\, F_x\, F_{xy}\, F_y - F_x^2\, F_{yy}}{F_y^3}\,. \end{aligned}$$

Für einen kritischen Punkt muss $y' = 0$, also $F_x = x - 1 = 0$ und somit $x = 1$ sein. Wegen $F_x = 0$ ist dort die zweite Ableitung

$$y'' \;=\; \frac{-F_{xx}\, F_y^2}{F_y^3} \;=\; \frac{-F_{xx}}{F_y} \;=\; \frac{-1}{e^y + 1} \;<\; 0.$$

Somit liegt an diesem kritischen Punkt ein lokales Maximum vor.

Bemerkung: Der zu $x = 1$ gehörende Wert von y erfüllt die Gleichung

$$F(1, y) \;=\; e^y + y + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} \;=\; e^y + y - 1 \;=\; 0.$$

Sicher ist $y = 0$ eine Lösung. Sie ist auch die einzige, denn die Funktion $y \mapsto e^y + y - 1$ hat Ableitung $e^y + 1 > 0$, ist also überall streng monoton wachsend, und kann daher höchstens eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$ haben.

3. **a)** $x(u, v) = u \cosh v$, $y(u, v) = u \sinh v$.

$$\begin{aligned} \det \nabla T = \; & \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sinh v & u \sinh v \\ \sinh v & u \cosh v \end{pmatrix} \\ &= u(\cosh^2 v - \sinh^2 v) = u\,. \end{aligned}$$

b) Wir betrachten den Bereich

$$\left\{ (x\,,\, y) \mid 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4\,,\; -\tfrac{1}{2}x \leq y \leq \tfrac{1}{2}x\,,\; x > 0 \right\}$$

Sei nun

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cosh v \\ u \sinh v \end{pmatrix}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus der Bedingung $x > 0$ folgt

$$u \cosh v > 0 \,.$$

Da $\cosh v = \frac{1}{2}\left(e^v + e^{-v}\right) > 0$ ist dies äquivalent zu

$$u > 0 \,. \tag{1}$$

Mithilfe von $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$ folgt

$$1 \leq x^2 - y^2 \leq 4 \Longleftrightarrow 1 \leq 1 \leq u^2 \left(\cosh^2 v - \sinh 2v\right) \leq 4 \Longleftrightarrow 1 \leq u^2 \leq 4 \,.$$

Wegen (1) ist dies äquivalent zu

$$1 \leq u \leq 2 \,. \tag{2}$$

Weiter folgt aus $-\frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{1}{2}x$, dass

$$-\frac{1}{2} u \cosh v \leq u \sinh v \leq \frac{1}{2} u \cosh v \,.$$

Da $u > 0$ und $\cosh v > 0$ ist dies äquivalent zu

$$-\frac{1}{2} \leq \tanh v \leq \frac{1}{2} \,,$$

wobei $\tanh v = \frac{\sinh v}{\cosh v}$. Daraus folgt

$$\operatorname{arctanh}\left(-\frac{1}{2}\right) \leq v \leq \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\right) \,.$$

Mithilfe von $\operatorname{arctanh}(v) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ und $\operatorname{arctanh}(-x) = -\operatorname{arctanh}(x)$ folgt

$$-\frac{1}{2}\ln 3 \leq v \leq \frac{1}{2}\ln 3 \,. \tag{3}$$

Die beiden Bedingungen (1) und (3) ergeben schliesslich

$$\tilde{B} = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^3 : \; 1 \leq u \leq 2 \,, \; -\frac{1}{2}\ln 3 \leq v \leq \frac{1}{2}\ln 3 \right\} \,.$$

c) Sei

$$\tilde{f}(u,v) \;\; = \;\; f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \;=\; e^{-u^2(\cosh^2 v - \sinh^2 v)} \;=\; e^{-u^2}$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\int_B f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \;\; &= \;\; \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(u,v) \left| \det \nabla T \right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \int_{v=-\frac{1}{2}\log 3}^{\frac{1}{2}\log 3} \int_{u=1}^{2} e^{-u^2} \, u \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= \log 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2} e^{-u^2} \right) \Big|_1^2 \\
&= \tfrac{1}{2} \log 3 \cdot (e^{-1} - e^{-4}) \;\approx\; 0.192
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Frage 1

Definiere

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $df(x,y)$ ist

4. ○

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}.$$

√ ○

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$$

Berechne $f^{-1}(u,v)$ und $df^{-1}(u,v)$.

√ ○

$$f^{-1}(u,v) = \Big(\frac{1}{2}(\ln(u)+\ln(v)), \frac{1}{2}(\ln(u)-\ln(v))\Big), \qquad df^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2u} & \frac{1}{2v} \\ \frac{1}{2u} & -\frac{1}{2v} \end{pmatrix}.$$

○

$$f^{-1}(u,v) = \Big(\frac{1}{2}(\ln(u)\cdot\ln(v)), \frac{1}{2}\frac{\ln(u)}{\ln(v)}\Big), \qquad df^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\ln(v)}{2u} & \frac{\ln(u)}{2v} \\ \frac{1}{2u\ln(v)} & -\frac{\ln(u)}{2v\ln^2(v)} \end{pmatrix}.$$

Um die Umkehrfunktion f^{-1} zu bestimmen müssen wir das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcl} e^{x+y} & = & u \\ e^{x-y} & = & v \end{array}\right\}$$

lösen. Dies ist äquivalent zu

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & \ln(u) \\ x-y & = & \ln(v) \end{array}\right\}$$

Addieren der beiden Gleichungen und Division durch 2 lieftert

$$x = \frac{1}{2}\ln(uv).$$

Analog ergibt subtrahieren der zweiten Gleichung von der ersten und Division durch 2

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{v}\right).$$

Somit folgt die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln(uv) \\ \ln\left(\frac{u}{v}\right) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$df^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & -\frac{1}{v} \end{pmatrix}$$