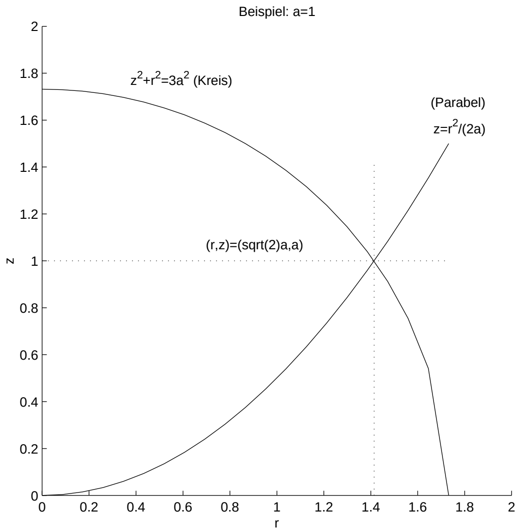
Musterlösung 8

1. Der Integrationsbereich B ist rotationssymmetrisch um die z-Achse und entsteht daher durch Drehung eines Durchschnittes mit der halben Koordinatenebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0 \wedge x \geq 0\}$ um die z-Achse. Dieser Durchschnitt wird begrenzt durch

- die z-Achse,
- die Parabel $x^2 + y^2 = 2az$ und
- den Kreis $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.



Der Symmetrie des Problems entsprechend rechnen wir in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \qquad (r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)) \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = r^2. \end{aligned}$$

Die Parabel und der Kreis von oben werden dann durch die Gleichungen

$$r^2 = 2az \quad \text{und} \quad r^2 + z^2 = 3a^2$$

beschrieben.

Damit wir die Integrationsgrenzen bestimmen können, benötigen wir den Schnittpunkt von Parabel und Kreis:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2az \quad \text{und} \quad r^2 + z^2 = 3a^2 \\ \Rightarrow \qquad 2az + z^2 &= 3a^2 \\ z^2 + 2az - 3a^2 &= 0 \\ z_{1,2} &= -a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} = \begin{cases} -3a \\ a \end{cases} \end{aligned}$$

$z=-3a$ entfällt als Lösung, da $r^2 = 2az$ dann keine Lösung $r \in \mathbb{R}$ hat.

$\Rightarrow$ Schnittpunkt von Parabel und Kreis: $\boxed{z = a,\ r = \sqrt{2az} = \sqrt{2}\,a.}$

Für die Berechnung der Masse müssen wir noch das Volumenelement und die Dichte in Zylinderkoordinaten ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\text{Volumenelement: } dV &= r\,drdz\,d\varphi \\
\text{Dichte: } \varrho &= x^2+y^2+z^2 = r^2+z^2
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Masse} &= \int_B \varrho\,dV = \\
&= \int_0^a \int_0^{\sqrt{2az}} \int_0^{2\pi} (r^3+z^2r)\,d\varphi drdz + \int_a^{\sqrt{3}\,a} \int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}} \int_0^{2\pi} (r^3+z^2r)\,d\varphi drdz = \\
&= 2\pi \int_0^a \int_0^{\sqrt{2az}} (r^3+z^2r)\,drdz + 2\pi \int_a^{\sqrt{3}\,a} \int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}} (r^3+z^2r)\,drdz
\end{aligned}$$

Wir verwenden

$$\int r^3+z^2r\,dr = \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}z^2r^2 + C = \frac{1}{4}(r^2+2z^2)r^2 + C$$

und erhalten damit

$\Rightarrow$

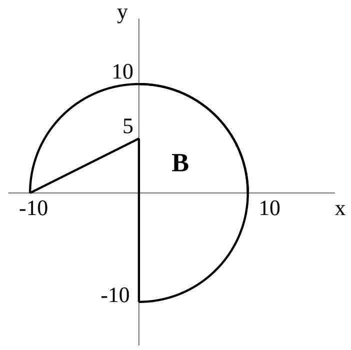
$$\begin{aligned}
&\text{Masse} \\
&= 2\pi\left(\int_0^a \left[\frac{1}{4}(r^2+2z^2)r^2\right]\Bigg|_{r=0}^{\sqrt{2az}} dz + \int_a^{\sqrt{3}\,a} \left[\frac{1}{4}(r^2+2z^2)r^2\right]\Bigg|_{r=0}^{\sqrt{3a^2-z^2}} dz\right) \\
&= 2\pi\left(\int_0^a \frac{1}{4}(2az+2z^2)2az\,dz + \int_a^{\sqrt{3}\,a} \frac{1}{4}(3a^2+z^2)(3a^2-z^2)\,dz\right) \\
&= 2\pi\left(\int_0^a a^2z^2+az^3\,dz + \frac{1}{4}\int_a^{\sqrt{3}\,a} 9a^4-z^4\,dz\right) \\
&= 2\pi\left(\left[\frac{1}{3}a^2z^3+\frac{1}{4}az^4\right]\Bigg|_{z=0}^{a} + \frac{1}{4}\left[9a^4z-\frac{1}{5}z^5\right]\Bigg|_{z=a}^{\sqrt{3}\,a}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{3}a^5+\frac{1}{4}a^5+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\left(9a^5-\frac{1}{5}\cdot 9a^5\right)-\frac{1}{4}\left(9a^5-\frac{1}{5}a^5\right)\right) \\
&= 2\pi a^5\left(-\frac{97}{60}+\frac{9\sqrt{3}}{5}\right).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Man kann F auch anders parametrisieren und die Masse mit der Formel

$$\text{Masse} = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}\,a} \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} (r^3+z^2r)\,dzdr$$

berechnen.

Siehe nächstes Blatt!



2. Die Menge B setzt sich zusammen aus den drei Eckpunkten

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

den Randbögen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und dem Inneren $\widetilde{B}$. Die kritischen Punkte von f in $\widetilde{B}$ müssen das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\nabla f = (2x - 8, 2y - 6) = (0, 0).$$

Wir erhalten den Punkt $P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, der, wie man sich leicht überzeugt, tatsächlich in $\widetilde{B}$ liegt (wegen $4^2 + 3^2 = 25 < 100 = 10^2$).

Längs γ_1 ist $x = 0$ und $-10 < y < 5$. Die bedingt kritischen Punkte von f auf γ_1 sind die kritischen Punkte der ersetzten Funktion

$$y \mapsto f(0, y) = y^2 - 6y.$$

Die Gleichung $0 = \frac{d}{dy}(f(0, y)) = 2y - 6$ liefert $y = 3$ und damit den Punkt $P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, der auch wirklich auf γ_1 liegt.

Längs γ_2 ist $x = -10 + 2y$ und $0 < y < 5$. Es gilt daher, die kritischen Punkte der Funktion

$$y \mapsto f(-10 + 2y, y) = 5y^2 - 62y + 180$$

zu bestimmen. Es muss also gelten

$$0 = \frac{d}{dy} f(-10 + 2y, y) = 10y - 62.$$

Daraus folgt $y = 6.2$ und $x = 2.4$, aber der Punkt mit diesen Koordinaten liegt nicht auf γ_2.

Für γ_3 benutzen wir Lagrangemultiplikatoren mit der Nebenbedingung $F(x, y) := x^2 + y^2 - 100 \overset{!}{=} 0$. Es muss gelten:

$$\begin{array}{rcccrcl} f_x & = & \lambda F_x & \Leftrightarrow & 2x - 8 & = & 2\lambda x \\ f_y & = & \lambda F_y & \Leftrightarrow & 2y - 6 & = & 2\lambda y \\ F & = & 0 & \Leftrightarrow & x^2 + y^2 & = & 100. \end{array}$$

Auflösen ergibt $\lambda \neq 1$ und

$$\begin{array}{rcccrcl} x & = & \frac{4}{1-\lambda}; & & y & = & \frac{3}{1-\lambda} \\ \frac{16}{(1-\lambda)^2} + \frac{9}{(1-\lambda)^2} & = & 100; & & \frac{1}{(1-\lambda)^2} & = & 4 \\ \lambda & = & \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{3}{2}. & & & & \end{array}$$

Bitte wenden!

Dies liefert $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, von denen aber nur der Punkt $P_6 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf γ_3 liegt. Wir haben also folgende "Kandidaten" (der Übersicht halber schreiben wir die Koordinaten der Punkte als Zeilenvektoren):

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
(x, y)	$(0, -10)$	$(0, 5)$	$(-10, 0)$	$(4, 3)$	$(0, 3)$	$(8, 6)$
$f(x, y)$	160	-5	180	-25	-9	0

Jetzt gilt

$$\begin{aligned} \max\left\{ f(x,y) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B \right\} &= \max_{1 \le k \le 6} f(P_k) = 180, \\ \min\left\{ f(x,y) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B \right\} &= \min_{1 \le k \le 6} f(P_k) = -25. \end{aligned}$$

3. 1) Wir überprüfen dass die Funktion $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ die Gleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

erfüllt. Um das zu zeigen, berechen wir die Ableitungen u_{xx} und u_{tt}.

$$\begin{aligned} u_x = F'(x+ct) + G'(x-ct), \quad u_{xx} = F''(x+ct) + G''(x-ct) \\ u_t = F'(x+ct)\cdot c + G'(x-ct)\cdot(-c), \quad u_{tt} = F''(x+ct)c^2 + G''(x-ct)c^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Daraus folgt dass

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(F''(x+ct) + G''(x-ct) - F''(x+ct) - G''(x-ct)) = 0. \tag{2}$$

2) Aus teil 1) und Anfangsbedingungen haben wir

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x)$$

und ähnlich

$$u_t(x,0) = c(F'(x) - G'(x)) = g(x)$$

Daraus folgt dass $F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds + C$ wobei C eine reele Konstnate bezeichnet. Schlussendlich haben wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds + \frac{C}{2} \\ G(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds - \frac{C}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

damit ist

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) = \frac{1}{2}\Big(f(x+ct) + f(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Optiemirungsprobleme mit Nebenbedingungen werden oft mit Hilfe einer Lagrangefunktion gelöst. Um eine Funktion f mit der Nebenbedingung$g(x, y) = c$ zu optimieren benützen wir die Lagrangefunktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c).$$

Bemerken Sie, dass falls (x_0, y_0) ein kritischer Punkt von $f(x, y)$ mit der Nebenbedingung $g(x, y) = c$ ist und λ_0 der entsprechende Multiplikator ist, dann erfüllen die Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

Also, es muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(g(x, y) - c) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Anders formuliert, (x_0, y_0, λ_0) ist ein kritischer Punkt für unbedingte Lagrangefunktion L.

a) Wir möchten die Funktion $V(N, D) = 1000D^{0.6}N^{0.3}$ mit der Nebenbedingung $40.000D + 10.000N = 600.000$ maximieren. Die Nebenbedingung ist equivalent mit $4D + N = 60$. Die Lagrangefunktion ist gegeben als

$$L(D, N, \lambda) = 1000D^{0.6}N^{0.3} - \lambda(4D + N - 60).$$

b) Als $\frac{\partial L}{\partial D} = \frac{\partial L}{\partial N} = 0$, wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial D} &= 600D^{-0.4}N^{0.3} = 4\lambda \\ \frac{\partial V}{\partial N} &= 300D^{0.6}N^{-0.7} = \lambda \end{aligned} \tag{5}$$

Darus folgt dass

$$600D^{-0.4}N^{0.3} = 1200D^{0.6}N^{-0.7} \Leftrightarrow \frac{N}{D} = 2.$$

c) Aus *b*) haben wir $N = 2D$ und die letzte Bedingung $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ ergibt $4D + N = 60$. Also $6D = 60 \Rightarrow D = 10$ und $N = 20$.

d) Lagrange Multiplikator $\lambda = 300D^{0.6}N^{-0.7} = 300 \cdot 10^{0.6}20^{-0.7} = 146.68$.