Musterlösung 9

1. Integrationsgrenzen:

- z läuft bei festgehaltenem x und y zwischen x^2+y^2 und x^2+2y^2.
- Grenzen für y und x aus dem Bild sieht man $x \in [0,1]$ und $y \in [x, 2x]$.

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^1 \int_x^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} 1 \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_x^{2x} \Big((x^2+2y^2) - (x^2+y^2) \Big) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_x^{2x} y^2 \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{y^3}{3}\bigg|_{y=x}^{2x} dx \;=\; \int_0^1 \frac{1}{3} \left((2x)^3 - x^3 \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{7}{3} x^3 \, dx \;=\; \frac{7}{12} x^4 \bigg|_{x=0}^{1} = \frac{7}{12} \, .
\end{aligned}$$

2. *Bemerkung:* Man beachte, dass die in den Teilaufgaben **a)** und **b)** betrachteten Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ folgender Form sind:

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

das heisst, sie sind von z unabhängig und parallel zur (x,y)–Ebene. Somit entsprechen ihnen Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ der Form:

$$\widetilde{\mathbf{K}}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} ,$$

welche durch Parallelverschiebung in z–Richtung zu den ursprünglichen Vektorfeldern der Form $\mathbf{K}$ auf $\mathbb{R}^3$ erweitert werden können. Man beachte ausserdem, dass für solche Vektorfelder gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} -Q_z(x,y) \\ P_z(x,y) \\ Q_x(x,y) - P_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_x(x,y) - P_y(x,y) \end{pmatrix} .$$

Somit erfüllt ein solches Vektorfeld $\mathbf{K}$ die Integrabilitätsbedingung ein Potentialfeld zu sein (im 3–dimensionalen Sinn) genau dann, wenn $\widetilde{\mathbf{K}}$ sie (im 2–dimensionalen Sinn) erfüllt.

a) Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^3 \\ x + 5y \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

Bitte wenden!

gilt

$$\operatorname{rot}\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_x(x,y) - P_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+6y^2 \end{pmatrix} \not\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $\mathbf{K}$ nicht wirbelfrei und besitzt daher kein Potential.

b) Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+5 \\ 2xy-8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gilt

$$\operatorname{rot}\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_x(x,y) - P_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2y-2y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\mathbf{K}$ wirbelfrei. Da ausserdem der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, besitzt $\mathbf{K}$ ein Potential. Ein solches können wir auf zwei Weisen finden:

(1) Sei f ein Potential zu $\mathbf{K}$. Da $f_z(x,y,z) \equiv 0$ sein soll, muss f unabhängig von z sein, also $f = f(x,y)$. Aus $f_x(x,y) = P(x,y) = y^2+5$ folgt dann mit dem unbestimmten Integral

$$f(x,y) \;=\; \int (y^2+5)\,dx \;=\; (y^2+5)x + g(y) \;=\; xy^2 + 5x + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ noch von y abhängen darf! Ableiten dieser Gleichung nach y liefert

$$f_y(x,y) = 2xy + g'(y).$$

Andererseits gilt

$$f_y(x,y) = Q(x,y) = 2xy - 8,$$

also $g'(y) = -8$ und somit $g(y) = -8y + c$ für eine Konstante c. Somit ist

$$f(x,y) \;=\; xy^2 + 5x - 8y + c$$

ein Potential zu $\mathbf{K}$.

(*Bemerkung:* Da $\mathbb{R}^3$ zusammenhängend ist, unterscheiden sich zwei beliebige Potentiale nur um eine konstante Funktion. Darum hat jedes Potential von $\mathbf{K}$ die genannte Gestalt.)

(2) Da wir bereits wissen, dass ein Potential existiert, hängt das Linienintegral

$$f(P) := \int_{P_0}^{P} \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

nicht von der Wahl eines Wegs von P_0 nach P ab, und definiert für jeden festen Anfangspunkt $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ein Potential zu $\mathbf{K}$. Der Einfachheit halber wählen wir als Weg die gerade Strecke

$$\gamma \;:\; t \mapsto \begin{pmatrix} xt \\ yt \\ zt \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1],$$

Siehe nächstes Blatt!

von $P_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Das Potential f ergibt sich dann als

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^1 \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \mathbf{K}(xt, yt, zt) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} y^2t^2 + 5 \\ 2xyt^2 - 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big[xy^2t^2 + 5x + 2xy^2t^2 - 8y \Big] \mathrm{d}t \\
&= \Big[xy^2t^3 + (5x - 8y)t \Big]_0^1 \\
&= xy^2 + 5x - 8y\,.
\end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt in der Tat $\nabla f = \mathbf{K}$.

c) Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+x)y^2 \sin(z) e^x \\ 2xy \sin(z) e^x \\ xy^2 \cos(z) e^x \end{pmatrix},$$

gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{K} &= \nabla \times \mathbf{K} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2xy\cos(z)e^x - 2xy\cos(z)e^x \\ (1+x)y^2\cos(z)e^x - y^2\cos(z)e^x - xy^2\cos(z)e^x \\ 2y\sin(z)e^x + 2xy\sin(z)e^x - 2y(1+x)\sin(z)e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{K}$ wirbelfrei. Da ausserdem der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, besitzt $\mathbf{K}$ ein Potential.

Sei f ein Potential zu $\mathbf{K}$. Aus $f_y(x,y,z) = Q(x,y,z) = 2xy \sin z\, e^x$ folgt dann

$$f(x,y,z) \;=\; \int 2xy \sin z\, e^x\, dy \;=\; xy^2 \sin z\, e^x + g(x,z)\,,$$

wobei die Integrationskonstante $g(x,z)$ noch von x und z abhängen darf. Ableiten dieser Gleichung nach z liefert

$$f_z(x,y,z) = xy^2 \cos z\, e^x + g_z(x,z)\,.$$

Andererseits gilt

$$f_z(x,y,z) = R(x,y,z) = xy^2 \cos z\, e^x\,,$$

woraus $g_z(x,z) = 0$ folgt. Daher hängt $g(x,z)$ von z nicht ab, das heisst, es ist $g(x,z) = h(x)$ für eine Funktion h. Schliesslich zeigt Ableiten nach x

$$f_x(x,y,z) \;=\; \tfrac{\partial}{\partial x}\big(xy^2 \sin z\, e^x + h(x)\big) \;=\; (1+x)y^2 \sin z\, e^x + h'(x)\,.$$

Bitte wenden!

Dies muss aber gleich $P(x,y,z) = (1+x)y^2 \sin z\, e^x$ sein. Somit folgt $h'(x) = 0$, also ist h konstant, und die Funktion

$$xy^2 \sin z\, e^x + c$$

ist für jede Konstante c ein Potential zu **K**. Wie in (b) hat jedes Potential von **K** die genannte Gestalt.

Aliter: Mit Linienintegral wie in (b).

3. Definieren Sie und berechen Sie die Rotation des Vekorfeldes $Rot(K)$.

Frage 1

$K(x,y,z) = (3xy, -5z, 10x)$

√ ◯ $Rot(K) = (5, -10, -3x)$

◯ $Rot(K) = (-5, 10, 0)$

Seien (x,y,z) die kartesischen Koordinaten des dreidimensionalen euklidischen Raumes und i, j und k die normierten, zueinander senkrechten Basisvektoren. Die Rotation eines dreidimensionalen, differenzierbaren Vektorfeldes $F(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z) = iF_x + jF_y + kF_z$ ist das dreidimensionale Vektorfeld

$$Rot(F) = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})i + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})j + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})k$$

Offensichtlich ist hier $Rot(K) = 5i - 10j - 3xk = (5, -10, -3x)$

Frage 2

$K(x,y) = (x^2 - y^2, 2y - x)$

◯ $Rot(K) = (0,0,0)$

√ ◯ $Rot(K) = (0, 0, -1-2y)$

Das Vektorfeld K hat auf $\mathbb{R}^3$ die folgende Form $K(x,y) = (x^2 - y^2, 2y - x, 0) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$ und in diesem Fall ist $Rot(F) = (0, 0, Q_x(x,y) - P_y(x,y)) = (0, 0, -1-2y)$

4. Bestimmen Sie ob folgende Vektorfelder konservativ sind.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 3

$\mathbf{F}(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)\,,$

○ Nicht konservativ

√ ○ Konservativ

Für ein Vektorfeld $F : G \to \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) F ist konservativ.

b) Für je zwei Wege γ_1 und γ_2 in G mit demselben Anfangspunkt und demselben Endpunkt gilt

$$\int_{\gamma_1} F dx = \int_{\gamma_2} F dx$$

c) Für alle geschlossenen Kurven $\gamma \subset G$ gilt:

$$\int_{\gamma} F dx = 0$$

Ein C^1- Vektorfeld $F = (F_x, F_y, F_z)$ auf einem einfach zusammenhängeden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann konservativ, wenn gilt

$$Rot(F) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial j} = \frac{\partial F_j}{\partial i},\ i, j = x, y, z.$$

Daraus folgt dass:
Ein Vektorfeld $F = (P, Q) \subset \mathbb{R}^2$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G ist konservativ genau dann wenn

$$Q_x = P_y.$$

Hier haben wir $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos(y) = P_y$, und $F = (P, Q)$ ist definiert auf der Ebene $\mathbb{R}^2$, die ist einfach zusammenhängend, deswegen ist das Vektorfeld F konservativ.

Frage 4

$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y + 2xz, x + yz + z^3, x^2 + z^3)\,,$

√ ○ Nicht konservativ

○ Konservativ

Sei $F = (F_x, F_y, F_z) = (x^3 + y + 2xz, x + yz + z^3, x^2 + z^3)$ Offensichtlich ist $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 1$ und $\frac{\partial F_x}{\partial z} = 2x = \frac{\partial F_z}{\partial x}$, aber

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 3z^2 + y \neq \frac{\partial F_z}{\partial y},$$

deswegen ist F nicht konservativ.

Bitte wenden!

Frage 5

$\mathbb{K}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$

√ ◯ Nicht konservativ

◯ Konservativ

Die Rotation des Vektorfeldes K ist gleich null, weil folgende Gleichung gilt

$$Q_x - P_y = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-y}{x^2+y^2}\Big) = \cdots = 0$$

Aber das Vektorfeld K ist definiert auf der punktuierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die ist nicht einfach zusammenhängend, deswegen könen wir nicht schlissen, dass K konservativ ist. Im Gegenteil, wir zeigen dass K nicht konservativ ist. Sei γ ein Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung.

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) := (r\cos(t), r\sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Wir zeigen, dass

$$\int_\gamma K dz \neq 0,$$

also K erfüllt nicht die Bedingung c) von oben und ist nicht konservativ. Die Rechnung liefert

$$\int_\gamma K dz = \int_0^{2\pi} \langle K(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$