Musterlösung 5

1. **Bemerkung:** $\mathbf{I}(\alpha)$ ist die sogenannte *Laplace–Transformierte* der Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

$$\boxed{\mathbf{I}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin(x)}{x} \, dx}$$

Vorbemerkung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin x| \le |x|$.
Beweis: Wegen $\sin(-x) = -\sin x$ folgt die Ungleichung für $x \le 0$ aus derjenigen für $x \ge 0$. Für letztere betrachte die Funktion $f_\pm(x) := x \pm \sin x$. Sie ist differenzierbar mit Ableitung $f'_\pm(x) = 1 \pm \cos x \ge 0$. Folglich ist $f_\pm$ monoton wachsend, für alle $x \ge 0$ gilt darum $x \pm \sin x = f_\pm(x) \ge f_\pm(0) = 0$. Daraus folgt $|\sin x| = \max\{-\sin x, +\sin x\} \le x$ für alle $x \ge 0$, was zu zeigen war.

a) Für alle $\alpha \ge 0$ ist das Integral im Punkt $x = 0$ definiert, weil der Integrand $e^{-\alpha x} \frac{\sin(x)}{x}$ für $x \to 0^+$ stetig fortsetzbar ist (d. h. das Integral ist bei $x = 0$ gar nicht uneigentlich):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} e^{-\alpha x} \frac{\sin(x)}{x} &= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} e^{-\alpha x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}}_{\text{Limes vom Typ „}\frac{0}{0}\text{“}} \\
&\overset{\text{B.–H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Für alle $\alpha > 0$ ist das Integral im rechten Grenzwert $x \to +\infty$ konvergent, weil der Integrand *exponentiell abfällt*:

$$\left| e^{-\alpha x} \frac{\sin(x)}{x} \right| = e^{-\alpha x} \cdot \frac{|\sin(x)|}{|x|} \le e^{-\alpha x} \qquad \text{(nach der Vorbemerkung)}$$

Ausführlich gilt:

$$\int_0^\infty \left| e^{-\alpha x} \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \;\le\; \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx \;=\; -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\bigg|_{x=0}^{\infty} \;=\; \frac{1}{\alpha} \;<\; \infty.$$

Deshalb konvergiert $\int_0^\infty \left| e^{-\alpha x} \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ und damit auch $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$.

Bemerkung: Für $\alpha = 0$ konvergiert das uneigentliche Integral $\mathbf{I}(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \, dx$ zwar auch, aber dafür bedarf es anderer Methoden, denn das Integral des Betrages divergiert: $\int_0^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \infty$.

Bemerkung: Es GENÜGT NICHT, zu zeigen, dass der Integrand für $x \to +\infty$ gegen Null strebt.

b) **Bemerkung:** Eigentlich darf man die Differentiation nach dem Parameter α NICHT IMMER mit dem Grenzübergang $R \to +\infty$ des uneigentlichen Integrals vertauschen(!!!). Im hier vorliegenden Fall ist es jedoch erlaubt, was man eigentlich noch beweisen müsste, aber mit den Vorkenntnissen der Vorlesung ist das zu langwierig). Darum hier nur die Rechnung:

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\;dx \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\;dx \\
&= \int_0^\infty -xe^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\;dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-\alpha x}\,\sin x\;dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-\alpha x}\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\;dx \\
&= \int_0^\infty -\frac{e^{(i-\alpha)x}-e^{(-i-\alpha)x}}{2i}\;x \\
&= \left[-\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(i-\alpha)x}}{i-\alpha}+\frac{e^{(-i-\alpha)x}}{i+\alpha}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{\infty} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-\alpha}+\frac{1}{i+\alpha}\right) \\
&= -\frac{1}{1+\alpha^2}.
\end{aligned}
$$

Bei $(*)$ wurde benutzt, dass gilt

$$\lim_{x\to\infty} e^{(\pm i-\alpha)x} = \lim_{x\to\infty} e^{\pm ix}\cdot e^{-\alpha x} = 0$$

da der zweite Faktor nach 0 geht und der erste Faktor stets den Betrag 1 hat.

(Variante: Berechnung des Integrals mit zweifacher partieller Integration)

Eine Stammfunktion von $fS - \frac{1}{1+\alpha^2}$ ist $-\arctan\alpha$.

c) Nach **b)** sind sowohl $\mathbf{I}(\alpha)$ als auch $-\arctan\alpha$ Stammfunktionen von $\mathbf{I}'(\alpha)$. Da die Differenz zweier Stammfunktionen stets eine Konstante ist, folgt

$$\mathbf{I}(\alpha) = C - \arctan\alpha$$

für eine Konstante C. Diese Konstante ist charakterisiert durch

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\mathbf{I}(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\big(C-\arctan\alpha\big) = C - \lim_{\alpha\to+\infty}\arctan\alpha = C-\frac{\pi}{2}\,.$$

Andererseits gilt nach **a)**

$$\int_0^\infty \left|e^{-\alpha x}\,\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx \;\le\; \frac{1}{\alpha}\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \alpha\to\infty$$

und somit auch

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\mathbf{I}(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\frac{\sin(x)}{x}\,dx = 0.$$

Durch Vergleich der letzten beiden Formeln folgt $C=\frac{\pi}{2}$ und schliesslich

$$\mathbf{I}(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

d) **Bemerkung:** Die Formel in c) wurde nur für $\alpha > 0$ gezeigt. Man kann aber beweisen, dass die Funktion $\mathbf{I}(\alpha)$ im Punkt $\alpha = 0$ (rechtsseitig) stetig ist(!!!). Der Beweis wird hier nicht ausgeführt.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{I}(0) \stackrel{(!!!)}{=} \lim_{\alpha\to 0^+} \mathbf{I}(\alpha) \stackrel{\textbf{c)}}{=} \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

2. **a)** Es gilt

$$\begin{aligned} f_x &= -\tfrac{1}{x^2y} & f_{xx} &= \tfrac{2}{x^3y} \\ f_y &= -\tfrac{1}{xy^2} & f_{yy} &= \tfrac{2}{xy^3} \\ & & f_{xy} &= \tfrac{1}{x^2y^2} = f_{yx} \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in einem Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} T_f(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right]\,. \end{aligned}$$

Daher haben wir im Punkt $(1,2)$:

$$T_f(1+\Delta x, 2+\Delta y) = \frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta y}{4} + \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x\Delta y}{4} + \frac{\Delta y^2}{8}\,.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} g_x &= \tfrac{z}{y}e^{\frac{x}{y}} & g_{xx} &= \tfrac{z}{y^2}e^{\frac{x}{y}} \\ g_y &= -\tfrac{xz}{y^2}e^{\frac{x}{y}} & g_{yy} &= \left[\tfrac{2xz}{y^3} + \tfrac{x^2z}{y^4}\right]e^{\frac{x}{y}} \\ g_z &= e^{\frac{x}{y}} & g_{zz} &= 0 \\ & & g_{xy} &= -\left[\tfrac{z}{y^2} + \tfrac{xz}{y^3}\right]e^{\frac{x}{y}} = g_{yx} \\ & & g_{xz} &= \tfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} = g_{zx} \\ & & g_{yz} &= -\tfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} = g_{zy} \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von g in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} T_g(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0, \Delta z + z_0) &= g(x_0,y_0,z_0) + g_x\Delta x + g_y\Delta y + g_z\Delta z \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[g_{xx}\Delta x^2 + g_{yy}\Delta y^2 + g_{zz}\Delta z^2\right] \\ &\quad + g_{xy}\Delta x\Delta y + g_{xz}\Delta x\Delta z + g_{yz}\Delta y\Delta z\,, \end{aligned}$$

wobei die partiellen Ableitungen von g alle im Punkt (x_0, y_0, z_0) zu nehmen sind. Daher haben wir im Punkt $(1,1,1)$:

$$T_g(\Delta x{+}1, \Delta y{+}1, \Delta z{+}1) = e\left[1 + \Delta x - \Delta y + \Delta z + \frac{1}{2}\Delta x^2 + \frac{3}{2}\Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y + \Delta x\Delta z - \Delta y\Delta z\right]\,.$$

3. Zunächst berechnen wir die erste Ableitung

$$\nabla f(x,y) = \Big(f_x(x,y), f_y(x,y)\Big) = \Big(y^2 + \sin x, 2xy\Big)\,.$$

Für einen kritischen Punkt muss diese verschwinden, es muss also gelten $y^2 + \sin x = 0$ und $2xy = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt, dass x oder y verschwinden muss. Für $x = 0$ liefert

Bitte wenden!

die erste Gleichung $y = 0$, und für $y = 0$ folgt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die kritischen Punkte von f sind also genau die Punkte der Form $(x, y) = (k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Zur Bestimmung des Typs berechnen wir die zweite Ableitung, die Hessesche Matrix:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

In einem kritischen Punkt $(x, y) = (k\pi, 0)$ ist diese:

$$\nabla^2 f(k\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos k\pi & 0 \\ 0 & 2k\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2k\pi \end{bmatrix}.$$

Dies ist bereits eine Diagonalmatrix; ihre Eigenwerte stehen auf der Diagonalen. Daher haben wir die folgenden Fälle:

$k > 0$	gerade	$\Rightarrow$ beide Eigenwerte sind positiv	$\Rightarrow$ lokales Minimum
$k > 0$	ungerade	$\Rightarrow$ ein negativer und ein positiver Eigenwert	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$k = 0$		$\Rightarrow$ ein Eigenwert ist 0	$\Rightarrow$ ausgearteter Punkt
$k < 0$	gerade	$\Rightarrow$ ein positiver und ein negativer Eigenwert	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$k < 0$	ungerade	$\Rightarrow$ beide Eigenwerte negativ	$\Rightarrow$ lokales Maximum

Zusatz: (war nicht gefragt) Die Situation in der Nähe des ausgearteten Punkts $(0, 0)$ können wir wie folgt analysieren. Zunächst halten wir ein beliebig kleines $y \neq 0$ fest und betrachten die Funktion $x \mapsto f(x, y) = xy^2 - \cos x$. Ihre Ableitung im Punkt $x = 0$ ist $y^2 + \sin x \,\big|_{x=0} = y^2 \neq 0$. Darum ist dieser Punkt weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum, d.h., es existieren beliebig kleine x mit $f(x, y) > f(0, y)$ und andere beliebig kleine x mit $f(x, y) < f(0, y)$. Nun ist aber $f(0, y) = 0 \cdot y^2 - \cos 0 = -1 = f(0, 0)$ unabhängig von y. Für beliebig kleine $y \neq 0$ existieren also beliebig kleine x mit $f(x, y) > f(0, 0)$, und entsprechend mit $f(x, y) < f(0, 0)$. Somit hat f im Punkt $(0, 0)$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

Siehe nächstes Blatt!

4. Frage 1

Sei $f(x, y) = \text{arctg}(2x^2 + 3xy - 4y^2)$. Berechne das Taylor Polynom 1. Ordnung um den Punkt $(1, 1)$.

- ◯ $\frac{\pi}{2} + \frac{7}{2}x - y$
- √ ◯ $\frac{\pi}{4} + \frac{7}{2}x - \frac{5}{2}y$
- ◯ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$

Das Taylor Polynom 1. Ordnung von f im Punkt (x_0, y_0) ist gegeben als

$$T_f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y$$

Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4x + 3y}{1 + (2x^2 + 3xy - 4y^2)^2} \\ \frac{3x - 8y}{1 + (2x^2 + 3xy - 4y^2)^2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

und hat an der Stelle $(1, 1)$ den Wert

$$\nabla f(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Als $f(1, 1) = \pi/4$ wir haben

$$T_f(x + 1, y + 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{2}x - \frac{5}{2}y.$$

5. Frage 2

Sei $f(x, y) = (1 + y)e^x \sin(xy)$. Berechene das Taylor Polynom 3. Ordung um den Punkt $(0, 0)$.

- ◯ $x + y + xy + x^2y + y^2x$
- ◯ $1 + y + xy + xy^2$
- √ ◯ $xy + x^2y + xy^2$

Das Taylor Polynom der Funktion $\sin(z)$ ist $z - \frac{z^3}{6}$ und Taylor Polynom der funktion e^x ist $1 + x + \frac{x^2}{2}$. Also wir haben

$$\begin{aligned} T_f(x, y) &= (1 + y)(1 + x + \frac{x^2}{2})(xy - \frac{x^3y^3}{6}) = \\ &= (1 + x + y + xy + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2y}{2})(xy - \frac{x^3y^3}{6}) \\ &= xy + x^2y + y^2x + \frac{x^3y}{2} + \cdots \end{aligned}$$