Musterlösung 5

1. Der Gradient der Funktion f_λ ist

$$\nabla f_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+4x^3 \\ 2y+\lambda z+4y^3 \\ 2z+\lambda y+4z^3 \end{pmatrix}$$

und die Hessematix berechnet sich zu

$$H_{f_\lambda}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2+12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+12y^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2+12z^2 \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich ist der Ursprung $(0,0,0)$ ein kritischer Punkt dieser Funktion. Die Hessematrix $H_{f_\lambda} = H_{f_\lambda}(0,0,0)$ ist dort

$$H_{f_\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix} .$$

Um den kritischen Punkt zu klassifizieren berechnen wir die Eigenwerte von H_{f_λ}. Dazu faktorisieren wir das charakteristische Polyom

$$\chi(\alpha) = \det \begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & \lambda \\ 0 & \lambda & 2-\alpha \end{pmatrix} = (2-\alpha)\left((2-\alpha)^2-\lambda^2\right) = (2-\alpha)(2+\lambda-\alpha)(2-\lambda-\alpha)$$

und lesen daraus die Eigenwerte

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 2+\lambda, \quad \alpha_3 = 2-\lambda$$

als Nullstellen des Polynoms.

Falls $|\lambda| < 2$ ist, sind alle drei Eigenwerte positiv. Folglich ist die Hessematrix H_{f_λ} positiv definit und der Ursprung ein lokales Minimum.

Falls $|\lambda| > 2$ ist, sind zwei Eigenwerte positiv und einer negativ. Folglich ist die Hessematrix H_{f_λ} indefinit und der Ursprung kein Extremum.

Für $|\lambda| = 2$ ist die Hessematrix entartet. Für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ gilt

$$f_{\pm 2}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \pm 2yz + x^4+y^4+z^4 = x^2+(y\pm z)^2+x^4+y^4+z^4 > 0 ,$$

denn alle Terme sind grösser oder gleich null und mindestens ein Term vierter Potenz ist strikt positiv. Folglich ist der Ursprung ein lokales Minimum.

2. **a)** Durch Einsetzen erkennt man, dass $(1,1)$ eine Lösung ist.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x+2y+4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0$$

Also existiert nach dem impliziten Funktionensatz auf einer Umgebung von $x=1$ eine implizite Funktion ϕ mit $\phi(x) = y$, sodass $(x,\phi(x))$ die Gleichung löst.

Bitte wenden!

b) Eine explizite Darstellung von ϕ erhält man durch Auflösen nach y der Gleichung

$$y^2 + (4-4x)y + 2x^2 - 3x = 0\ .$$

Dies ergibt

$$\phi(x) = -2 + 2x \pm \sqrt{2x^2 - 5x + 4}.$$

Wir wissen dass $\phi(1) = 1$ gelten muss, dies bestimmt die Funktion ϕ eindeutig

$$\phi(x) = -2 + 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 4}\ .$$

Die Ableitung berechnet sich zu

$$\phi'(x) = 2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 4}}(4x-5)\ ,$$

folglich erhalten wir durch Einsetzen

$$\phi'(1) = \frac{3}{2}\ .$$

c)

$$\phi'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -\frac{(4x-4y-3)|_{(1,1)}}{(-4x+2y+4)|_{(1,1)}} = \frac{3}{2}$$

3. Die Funktion φ erfüllt die Gleichung

$$f(x,\varphi(x)) = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung nach x differenzieren erhalten wir:

$$\begin{aligned}&f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0 \Longleftrightarrow\\ &\varphi'(x) = \frac{-f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}\end{aligned}$$

Darus folgt dass die zweite Ableitung von φ

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}\right)\\ &= \frac{-(f_x(x,\varphi(x)))'_x f_y(x,\varphi(x)) + f_x(x,\varphi(x))(f_y(x,\varphi(x)))'_x}{(f_y(x,\varphi(x)))^2}\\ &= \frac{-f_{xx}f_y - f_{xy}\varphi'(x)f_y + f_x f_{yx} + f_x f_{yy}\varphi'(x)}{(f_y)^2}.\end{aligned}$$

Wir setzen noch $\varphi' = \frac{-f_x}{f_y}(x,\varphi(x))$ in obere Gleichung ein

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{-f_{xx}f_y + f_{xy}f_x + f_x f_{yx} - f_x f_{yy}\frac{f_x}{f_y}}{(f_y)^2}(x,\varphi(x)).\\ &= \frac{-f_{xx}f_y + 2f_x f_{xy} - f_x^2\frac{f_{yy}}{f_y}}{(f_y)^2}(x,\varphi(x)) \qquad (1)\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Für eine $n \times n$-Matrix $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$ ist die Determinante definiert:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\sigma(i)} \right)$$

Die Summe wird über alle Permutationen σ der symmetrischen Gruppe S_n vom Grad n berechnet und $\operatorname{sgn}(\sigma)$ bezeichnet das Signum der Permutation $\sigma : +1$, falls σ eine gerade Permutation ist und -1, falls sie ungerade ist. Sei $B = A - \lambda I$, dann ist

$$\det(B) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda) + \text{ die übrigen Terme}$$

Alle übrige Terme erhalten nur λ^k, wo $k \leq n - 2$ ist. Also

$$\det(B) = (-1)^n (\lambda^n - \operatorname{Tr}(A) \lambda^{n-1} + \cdots).$$