Auftrieb und Drehmoment eines schwimmenden Körpers

Ein fester Körper K mit Oberfläche ∂K schwimmt in einer Flüssigkeit, deren Druck an der Stelle x mit $p(x)$ bezeichnet wird. Durch den Druck an der Oberfläche übt dann die Flüssigkeit auf den Körper die Kraft (den Auftrieb)

$$\vec{F} = -\int_{\partial K} p\,\vec{n}\; d\omega$$

aus. Dabei ist $\vec{n}(x)$ der nach aussen zeigende Normaleneinheitsvektor in einem Punkt $x \in \partial K$.

Ist y ein beliebiger Punkt, so ist das Drehmoment um y, das durch den Druck der Flüssigkeit entsteht, gleich

$$\vec{T}(y) = -\int_{\partial K} (x-y) \times (p\,\vec{n})\; d\omega$$

Wir nehmen an, dass

- der Körper auf die Druckverteilung in der Flüssigkeit keinen Einfluss hat, d.h. , dass in jedem Punkt x ausserhalb des Körpers der Druck in der Flüssigkeit so ist, wie wenn der Körper nicht da wäre. In anderen Worten: p lässt sich differenzierbar über die Punkte des Körpers fortsetzen. Wenn wir diese Fortsetzung auch mit p bezeichnen, beschreibt sie den Druck in der Flüssigkeit, wenn der Körper nicht da ist.
- die Flüssigkeit im Gleichgewicht ist. Das heisst, dass

  $$\nabla p(x) = -g\,\rho(x)\vec{e}_3$$

  wobei g die Gravitationskonstante, $\rho(x)$ die Dichte der Flüssigkeit an der Stelle x und $\vec{e}_3$ der dritte Einheitsvektor ist.

Nach einer Variante des Divergenzsatzes ist

$$\vec{F} = -\int_K \nabla p\; d\mu = g\vec{e}_3 \int_K \rho\; d\mu = M_F g\,\vec{e}_3$$

wobei M_F die Masse der durch den Körper verdrängten Flüssigkeit ist (Archimedisches Prinzip). Ausserdem ist

$$\vec{T}(y) = -\int_{\partial K} \big[p(x)\,(x-y)\big] \times \vec{n}\; d\omega = \int_K \nabla \times \big[p(x)\,(x-y)\big]\; d\mu$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\nabla \times \big[p(x)\,(x-y)\big] &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p(x)\,(x_1-y_1) \\ p(x)\,(x_2-y_2) \\ p(x)\,(x_3-y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_3-y_3) - \frac{\partial p}{\partial x_3}(x_2-y_2) \\ \frac{\partial p}{\partial x_3}(x_1-y_1) - \frac{\partial p}{\partial x_1}(x_3-y_3) \\ \frac{\partial p}{\partial x_3}(x_2-y_2) - \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1-y_1) \end{pmatrix} \\ &= (\nabla p)(x) \times (x-y) = -g\,\rho(x)\;\vec{e}_3 \times (x-y)\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\vec{T}(y) = -g\vec{e}_3 \times \Big[\int_K \rho\, x \; d\mu - y \int_K \rho \; d\mu \Big] = -gM_F\vec{e}_3 \times [X - y]$$

wobei

$$X = \tfrac{1}{M_F} \int_K \rho\, x \; d\mu$$

der *Schwerpunkt der durch den Körper verdrängten Flüssigkeit* ist. Insbesondre ist das Drehmoment um den Punkt X gleich Null.

Die Auftriebskraft wirkt also so, als ob die gesamte Kraft $\vec{F}$ im Punkt X angreift. Andererseits wirkt die Gravitation auf den Körper so, wie wenn die ganze Gravitationskraft im *Schwerpunkt des Körpers* angreift. Deswegen ist es günstig, Boote so zu bauen, dass der Punkt X über dem Schwerpunkt des Körpers liegt, weil dann das die Gravitation das Boot stabilisiert.

Quelle: http://www.math.ubc.ca/ feldman/m317/buoyancy.pdf