Serie 13

1. Gegeben seien der Vektor $a = (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ und die Funktion

$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$v = \nabla f + a \times \nabla f.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{div} v$.

b) Berechnen Sie den Fluss von v durch die Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung.

c) Berechnen Sie die Rotation von $\operatorname{rot} v$.

d) Berechnen Sie die Zirkulation von v entlang des Einheitskreises um den Ursprung in der Normalebene zu a.

2. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

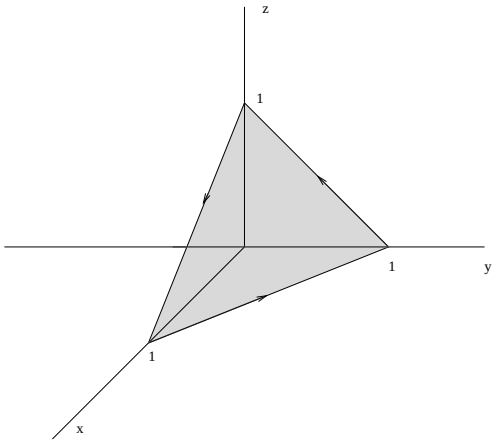
$$V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -yz^2 \\ -y^2 z \end{pmatrix}$$

und die Menge $S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

3. Berechnen Sie die Zirkulation $\displaystyle\int_\gamma K \cdot dr$ für das Vektorfeld

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - y + z \\ y - z + x \\ z - x + y \end{pmatrix}$$

und den in der Abbildung dargestellten Weg γ



Bitte wenden!

a) direkt.

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes und einer Parameterdarstellung der Dreiecksfläche.

Hinweis: Die Gesamtsituation ist symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung $x \to y \to z \to x$.

4. a) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\triangle(\ln r) = 0.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \operatorname{grad}(\ln(r)) \cdot \overrightarrow{n}\, ds$$

für eine geschlossene Kurve γ um $(0, 0)$.