Serie 3

1. Sei R der Bereich in $\mathbb{R}^3$, der durch Paraboloid $x^2 + y^2 = 9 - z$ und die Ebene $z = 0$ begrenzt wird. Berechne

$$\int_R (x^2 + y^2) d\mu(x, y, z)$$

2. Sei R der Bereich im ersten Oktanten, der durch die Kugeloberflaeche $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ und die Kegel $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ und $\vartheta = \arctan(2)$ begrenzt wird. (wie auf dem Bild unten). Dabei ist ϑ eine der Kugelkoordinaten. Sei $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$, berechne

$$\int_R f(x, y, z) dV$$

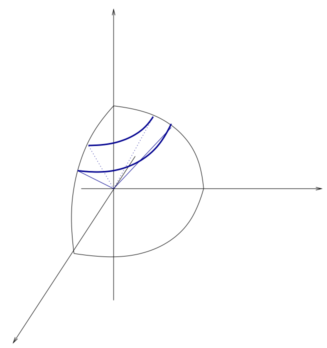

Abbildung 1: Integrationsbereich R

3. Ein Wald neben einer Strasse hat die Form wie in Figur 2. Die Bevölkerungsdichte von Hasen ist proportional zum Abstand von der Strasse und ist 0 auf der Strasse und 10 Hasen pro Quadratkilometer auf der entgegengesetzten Seite des Waldes. Wieviele Hasen leben im Wald?

Bitte wenden!

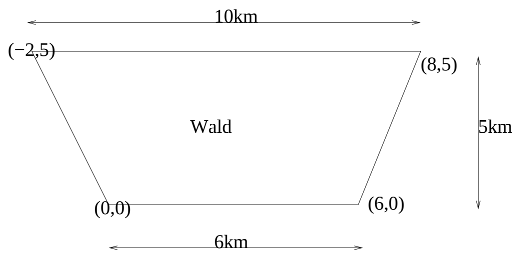

Abbildung 2: Wald

4. Frage 1

Bestimme die in der Formel

$$\int_B f(x,y,z)\,d\mu(x,y,z) = \int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

die durch … angedeuteten Integrationsgrenzen für die folgenden Bereiche B:

a) der durch die Flächen $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$ begrenzte Zylinder,

○ $\int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{0}^{H} f(x,y,z)dzdydz$

○ $\int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int\limits_{0}^{H} f(x,y,z)dzdydx$

○ $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^H f(x,y,z)dzdydx$

b) der durch die Flächen $x^2 + y^2 = R^2$, $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$ begrenzte, schief abgeschnittene Zylinder,

○ $\int\limits_{0}^{R} \int\limits_{0}^{R} \int\limits_{0}^{1-y-x} f(x,y,z)dzdxdy$

○ $\int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int\limits_{-y-x}^{1-x-y} f(x,y,z)dzdydx$

○ $\int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int\limits_{-x-y}^{1-x-y} f(x,y,z)dzdydx$

c) der durch die Bedingungen $x = 2z$, $x^2 + y^2 = (1-z)^2$ definierte, schief abgeschnittene Kreiskegel.

○ $\int\limits_{-2}^{\frac{2}{3}} \int\limits_{-\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}}^{\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

Siehe nächstes Blatt!

$\bigcirc$ $$\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}} \int_{\frac{x}{2}}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdydx$$

$\bigcirc$ $$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}}^{\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}} \int_{\frac{x}{2}}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdydx$$

5. Frage 2

In der nachstehenden Formel bezeichnen r, φ Polarkoordinaten. Was hat man an den offengelassenen Stellen einzusetzen?

$$\int_{0}^{2} \int_{0}^{x} f(\sqrt{x^2+y^2})dydx = \int \int ?drd\varphi$$

$\bigcirc$ $$\int_{0}^{2} \int_{0}^{\pi/4} f(r)rdrd\varphi$$

$\bigcirc$ $$\int_{0}^{\pi/4} \int_{0}^{2/\cos\varphi} f(r)rdrd\varphi$$

$\bigcirc$ $$\int_{0}^{\pi/4} \int_{0}^{2/\cos\varphi} f(r)drd\varphi$$