# Lösungen

1. (a) FWFW.
   (b) FFWW.
   (c) WWFF.
   (d) WF(Gegenbeispiel $\vec{v} = (0,0,1)$)F(Gegenbeispiel $\vec{v} = (0,0,z)$)W.
   (e) FFWF.

2. Sei $y(t) = \dot{x}(t)$. Die Differenzialgleichung

$$\dot{y}(t) = -(1+y^2)$$

lässt sich durch Separation der Variablen lösen.

$$\frac{dy}{1+y^2} = -dt$$
$$\arctan(y) = -(t + C_1)$$
$$y = -\tan(t + C_1).$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \dot{x}(0) = 0$ liefert $C_1 = 0$. Aus $y(t) = -\tan(t)$ folgt

$$x(t) = \ln|\cos(t)| + C_2.$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $C_2 = 0$. Die Lösung $x(t) = \ln|\cos(t)|$ ist definiert für

$$-\pi/2 < t < \pi/2.$$

3. a) 1. Möglichkeit: Substitution $u = x + y, v = x - y$.
   b) 2. Möglichkeit: $A\dot{x} = x, \dot{x} = A^{-1}x$.
   c) 3. Möglichkeit:

$$A\dot{\vec{x}} = \vec{x}, \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $\vec{x} = ve^{\alpha t}$ ist $A\alpha v = v$ und also $Av = \alpha^{-1}v$. Das char. Polynom von $A$ beträgt

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 1$$

mit Nullstellen

$$\lambda = 1 \pm i.$$

Deswegen sind die Eigenwerte von $A^{-1}$ gleich

$$\alpha = \frac{1}{1 \pm i} = \frac{1 \pm i}{2}$$

mit zugehrigen Eigenvektoren $(1, i)$ und $(1, -i)$. Real und Imaginärteil bilden eine Basis des Lösungsraums.

$$x(t) = e^{t/2}(C_1 \cos(t/2) + C_2 \sin(t/2))$$
$$y(t) = e^{t/2}(-C_1 \sin(t/2) + C_2 \cos(t/2)).$$

**Bitte wenden!**

4. Die ersten zwei Summanden der Divergenz von $\vec{v}$

$$div(\vec{v}) = yz + \sin(xz) + 3z^2$$

sind ungerade in $z$. Deswegen ist der Fluss gleich

$$\int_W 3z^2 dxdydz = [4z^3]_{-1}^1 = 8.$$

5. Das Indexpolynom

$$\alpha(\alpha - 1) - 1$$

hat die Nullstellen

$$\alpha_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(> 0), \;\; \alpha_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(< 0).$$

Da $x_p(t) = \frac{t^3}{5}$ eine partikuläre Lösung der DFG ist, ist

$$x(t) = Ct^{\alpha_+} + Dt^{\alpha_-} + \frac{t^3}{5}$$

die allgemeine Lösung der DFG.

a) $x(t) = Ct^{\alpha_+} + \frac{t^3}{5}$.

b) $x(t) = \frac{4}{5}t^{\alpha_+} + \frac{t^3}{5}$.

6. a) 1. Möglichkeit ("mit Stokes"): Da

$$rot(\vec{v}) = (\cdots, \cdots, (2z+1)e^{z^2}), \;\; n = (0,0,1)$$

ist die Arbeit von $\vec{v}$ längst $\gamma$ gleich die Fläche des Dreieks

$$A = \int_D dxdy = 1.$$

b) 2. Möglichkeit ("direkt"): Seien

$$\gamma_1(t) = (-t+1, t, 0), \;\; t \in [0,1]$$
$$-\gamma_2(t) = (t-1, t, 0), \;\; t \in [0,1]$$
$$\gamma_3(t) = (t, 0, 0), \;\; t \in [-1,1]$$

Parametrisierungen der Kanten des Weges. Die gesuchte Arbeit ist gleich

$$A = \int_\gamma v \cdot dr = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} v \cdot dr = \int_{\gamma_1-(-\gamma_2)+\gamma_3} v \cdot dr = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{t^2}+1 \\ (1-t)+(2(1-t)+1)te^{t^2} \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt +$$

$$-\int_0^1 \begin{pmatrix} e^{t^2}+1 \\ (t-1)+(2(t-1)+1)te^{t^2} \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 2 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 (-2e^{t^2} - 2 + 2(1-t) + 4(1-t)te^{t^2})dt + 4 =$$

$$= \int_0^1 e^{t^2}(-2+4t-4t^2)dt + 3 = -2\int_0^1 e^{t^2}(1-2t+2t^2)dt + 3 =$$

$$= -2[e^{t^2}(t-1)]_0^1 + 3 = -2 + 3 = 1.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

7. Die partielle Ableitungen des Integrals

$$I(a,b) = \int_{-1}^{1} (a + bx^2 - \cos(\pi x))^2 \, dx$$

sind

$$\partial I/\partial a = 2\int_{-1}^{1} (a + bx^2 - \cos(\pi x)) \, dx = 2(2a + \frac{2}{3}b)$$

$$\partial I/\partial b = 2\int_{-1}^{1} x^2(a + bx^2 - \cos(\pi x)) \, dx = 2(\frac{2}{3}a + \frac{2}{5}b - \mu),$$

wobei $\mu = \int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x) \, dx = -4/\pi^2$. Die kritische Punkte $(a,b)$ erfüllen

$$a + b/3 = 0, \;\; a/3 + b/5 = -2/\pi^2.$$

Durch ausrechnen ($b = -3a$, $a/3 - 3a/5 = -2/\pi^2$, $-4a/15 = -2/\pi^2$) kriegen wir die Lösung

$$a = \frac{15}{2\pi^2}, \;\; b = -\frac{45}{2\pi^2}, \;\; f(x) = \frac{15}{2\pi^2}(1 - 3x^2).$$

Die Hesse Matrix

$$(h_{ij}) = 2\begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2/5 \end{pmatrix}$$

hat $h_{11} > 0$ und Determinante $16/15 > 0$. Also ist sie positiv definit. Da $I$ nur ein kritischer Punkt hat, ist es eine globale Minimalstelle.

8. Für $f(x) = (1 - x^a)^{\frac{1}{a}}$ ist

$$f'(x) = -(1 - x^a)^{1/a-1}x^{a-1} = -(1 - x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3},$$

und also

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + (1 - x^{2/3})x^{-2/3}} = x^{-1/3}.$$

Der Oberflächeninhalt ist gleich

$$A = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2}x^{-1/3}dx.$$

Für $t = x^{2/3}$ ist $dt = \frac{2}{3}x^{-1/3}dx$. Deswegen

$$A = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{2}\int_0^1 (1 - t)^{3/2}dt = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12\pi}{5}.$$

9. Die Achse $AG$ hat Einheitsrichtungsvektor

$$\vec{v} = (1,1,1)/\sqrt{3}.$$

Die Projektion eines Ortsvektor $\vec{x} = (x,y,z)$ auf $AG$ ist

$$p(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{v}\vec{v} = \frac{x + y + z}{3}(1,1,1).$$

Also ist das Quadrat des Abstands zur Achse

$$d(x,y,z)^2 = |\vec{x} - p(\vec{x})|^2 = (x - \frac{x + y + z}{3})^2 + (y - \frac{x + y + z}{3})^2 + (z - \frac{x + y + z}{3})^2 =$$

**Bitte wenden!**

$$= \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Der Trägheitsmoment ist gleich

$$\theta_{AG} = \rho \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} d(x,y,z)^2 dxdydz = \frac{2}{3}\rho(3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2) = \frac{16}{3}\rho$$

10. a) Die Länge ist gleich

$$L(t) = \int_t^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_t^1 \sqrt{x^2+1}x^{-1}dx.$$

Für die Lösung des Integrals $\int \sqrt{x^2+1}x^{-1}dx$ setzen wir $u = \sqrt{x^2+1}, du = \frac{xdx}{u}$. Dann ist

$$x^{-1}dx = \frac{udu}{x^2} = \frac{udu}{u^2-1}$$

und also

$$\int \sqrt{x^2+1}x^{-1}dx = \int \frac{u^2}{u^2-1}du = \int (1 + \frac{1}{u^2-1})du =$$

$$= \int (1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}))du = u + \frac{1}{2}\ln\frac{|u-1|}{|u+1|} + C =$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} + C,$$

wobei

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}\Big(\ln(\sqrt{x^2+1}-1) - \ln(\sqrt{x^2+1}+1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\ln(\sqrt{x^2+1}-1) + \ln(\sqrt{x^2+1}+1)\Big) - \ln(\sqrt{x^2+1}+1) =$$

$$= \ln x - \ln(\sqrt{x^2+1}+1).$$

Deswegen

$$\int \sqrt{x^2+1}x^{-1}dx = \sqrt{1+x^2} + \ln(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}+1) + C$$

und

$$L(t) = \int_t^1 \sqrt{x^2+1}x^{-1}dx = \Big[\sqrt{1+x^2} + \ln(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}+1) + C\Big]_t^1 =$$

$$= -\ln(t) + \sqrt{2} - \sqrt{1+t^2} - \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(1+\sqrt{1+t^2}).$$

b) Da

$$\sqrt{1+t^2} = 1 + O(t)$$

und

$$\ln(1+\sqrt{1+t^2}) = \ln(2) + O(t)$$

ist

$$L(t) = \ln(1/t) + \sqrt{2} - 1 - \ln(\sqrt{2}+1) + \ln 2 + O(t).$$