Musterlösungen Schnellübung 1

1. Da die Funktion f überall differenzierbar ist, betrachten wir nur die Punkte mit $f_x = 0 = f_y$ und die Randpunkte. Für die ersten kriegen wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= \quad 4x + 4y - 8 = 0 \\ f_y(x,y) &= \quad 4x + 6y - 10 = 0. \end{cases}$$

Die einzige Lösung ist $x = y = 1$. Damit ist der Punkt $(1,1)$ ein Kandidat für die globale Maximalstelle. Wir wenden uns jetzt den Randpunkten des Qadrates zu. Auf der Quadratseite AB ist $y = 0$ und also

$$f(x,0) = 2x^2 - 8x + 2;$$

auf AD ist $x = 0$, also

$$f(0,y) = 3y^2 - 10y + 2;$$

auf CD ist $y = 2$ und

$$f(x,2) = 2x^2 + 8x + 12 - 8x - 18 = 2x^2 - 6,$$

und auf BC ist $x = 2$ und

$$f(2,y) = 3y^2 - 2y - 6.$$

In jedem Fall erhält man eine quadratische Funktion, deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist. Die grössten Funktionswerte werden also notwendigerweise in den Endpunkten der Definitionsintervalle, d.h. in den Eckpunkten A, B, C, D des Quadrates angenommen. Ein Vergleich der Werte von f auf diesen Punkten und auf dem Punkt $(1,1)$ liefert dann das Resultat. Wir erhalten

$$f(0,0) = 2, f(2,0) = -6, f(0,2) = -6, f(2,2) = 2, f(1,1) = -7.$$

Die Punkte $A = (0,0)$ und $C = (2,2)$ sind also die beiden globalen Maximalstellen der Funktion f im Quadrat $ABCD$.

2. Da

$$\varphi_y(x,y,z) = 3 = \psi_x(x,y,z), \varphi_z(x,y,z) = 0 = \chi_x(x,y,z), \psi_z(x,y,z) = 2z = \chi_y(x,y,z)$$

Bitte wenden!

sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, d.h. eine Funktion f existiert. Aus $f_x = \varphi$ folgt durch x-Integration, dass

$$f(x, y, z) = x^3 + 3xy - x + u_1(y, z),$$

wobei u_1 eine Funktion in y und z ist. Aus $f_y = \psi$ folgt durch y-Integration, dass

$$f(x, y, z) = z^2 y + 3xy + u_2(x, z),$$

und aus $f_z = \chi$ folgt durch z-Integration, dass

$$f(x, y, z) = yz^2 + z + u_3(x, y).$$

Durch ein Vergleich der letzten drei Gleichungen für f folgt, dass die gesuchte Funktion f durch

$$f(x, y, z) = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

gegeben ist, insbesondere bis auf einer Konstante $C \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. (Alternative Lösung: Stammbach, Analysis I/II, Teil B, Kap. IV, S. 47).

3. Der Gradient von f im Punkt (x, y, z) ist gleich

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2),$$

also

$$\operatorname{grad} f(1, 1, -1) = (-2, -1, 3).$$

Für $t = 0$ ist $\gamma(t) = (1, 1, -1)$. Der Tangentialvektor

$$\dot{\gamma}(0) = (-2e^{-2t}, 2\cos(t), 1 + \sin(t))|_{t=0} = (-2, 2, 1)$$

wird normiert auf

$$\frac{\dot{\gamma}(0)}{|\dot{\gamma}(0)|} = \frac{1}{3}(-2, 2, 1).$$

Die gesuchte Richtungsalbeleitung ist also gleich

$$\operatorname{grad} f(1, 1, -1) \cdot \frac{\dot{\gamma}(0)}{|\dot{\gamma}(0)|} = \frac{5}{3}.$$

4. **a)** Man berechnet

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f} = \frac{\partial}{\partial x} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{d}{dr} f(r)\Big|_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f'(r)\frac{x}{r}$$

und analog für die anderen Komponenten von $\mathbf{grad}\tilde{f}$. Die Behauptung folgt unmittelbar.

Siehe nächstes Blatt!

b) Aus a) muss also

$$\frac{f'(r)}{r} = \frac{1}{r^5} \quad \text{mit} \quad f(1) = 0$$

gelten. Integrieren führt zu $f(r) = -\frac{1}{3r^3} + c$, und aus $f(1) = 0$ folgt schliesslich

$$f(r) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3r^3}.$$