Musterlösungen Schnellübung 3

1. Es gilt:

$$\psi_u(u,v) = (-\frac{2}{3}\cos v, -\frac{2}{3}\sin v, 1)$$
$$\psi_v(u,v) = (-(2-\frac{2}{3}u)\sin v, (2-\frac{2}{3}u)\cos v, 0)$$
$$\psi_u(u,v) \times \psi_v(u,v) = (-(2-\frac{2}{3}u)\cos v, -(2-\frac{2}{3}u)\sin v, -\frac{2}{3}(2-\frac{2}{3}u)).$$

Daher

$$d\mathcal{O} = |\,\psi_u \times \psi_v\,|dudv = \sqrt{(2-\frac{2}{3}u)^2 + \frac{4}{9}(2-\frac{2}{3}u)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot |2-\frac{2}{3}u|.$$

Für $0 \leq u \leq 3$ gilt $2 - \frac{2}{3}u \geq 0$ und also

$$d\mathcal{O} = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot (2-\frac{2}{3}u).$$

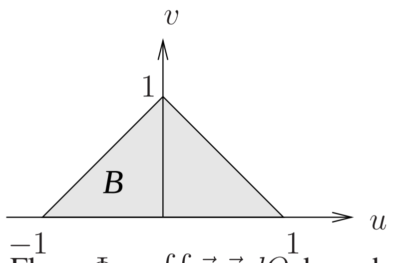
Deswegen:

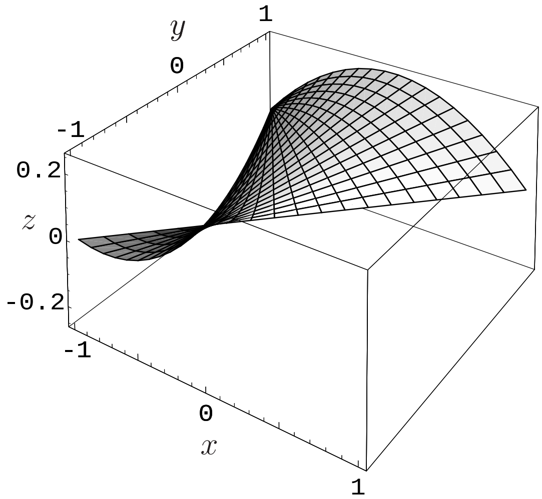
$$\mathcal{O} = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{13}}{3}(2-\frac{2}{3}u)\,dvdu = 2\pi\frac{\sqrt{13}}{3}(-\frac{3}{2})\frac{(2-\frac{2}{3}u)^2}{2} = 2\pi\sqrt{13},$$

was in der Tat den Flächeninhalt der Mantelfläche des Kegels mit Grundkreis vom Radius 2 auf der xy-Ebene und Spitze in $(0,0,3)$ entspricht.

Bitte wenden!

2.





Für den Fluss $\Phi = \iint\limits_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO$ berechnet man den Normalenvektor

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-v \\ -u-v \\ 2 \end{pmatrix},$$

der nach oben zeigt. So erhält man für den Fluss durch die Sattelfläche S

$$\Phi = -\iint\limits_B \vec{v}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \big(\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\big)\, du\, dv = -\int\limits_0^1 dv \int\limits_{v-1}^{1-v} \begin{pmatrix} 1-u+v \\ 1-u-v \\ 1+uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u-v \\ -u-v \\ 2 \end{pmatrix} du$$

$$= -\int\limits_0^1 dv \int\limits_{v-1}^{1-v} 2\,(3uv - v + 1)\, du = -2\int\limits_0^1 \Big[\tfrac{3}{2}u^2 v - uv + u\Big]_{v-1}^{1-v} dv = -4\int\limits_0^1 (v-1)^2\, dv = -\frac{4}{3}\,.$$

3. Seien $H := \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ die obere Halbsphäre, $A := \{(x,y,z) | x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ der Einheitskreis und $K := \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ die obere Halbkugel, dann gilt

$$\iint_H \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{O} + \iint_A \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{v}\, \mathrm{d}V,$$

wobei der Fluss durch A in negativer z–Richtung berechnet wird. Der Fluss durch H

Siehe nächstes Blatt!

ist somit

$$\begin{aligned}
\iint_H \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} &= \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V - \iint_A \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} \\
&= \iiint_K 0+1+1\,\mathrm{d}V - \iint_A \vec{v}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iiint_K \mathrm{d}V + \iint_A x^2+y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{3}\pi + \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2 r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\
&= \frac{4}{3}\pi + 2\pi\frac{1}{4} = \frac{11}{6}\pi.
\end{aligned}$$

4. **a)** Für die Berechnung eignen sich am besten Kugelkoordinaten (ϱ,ϕ,θ). Dann erhält man mit $x=\varrho\sin\theta\cos\phi,\ y=\varrho\sin\theta\sin\phi,\ z=\varrho\cos\theta,\ dV=\varrho^2\sin\theta\,d\varrho\,d\phi\,d\theta$ und $\operatorname{div}\mathbf{v}=4y$

$$\begin{aligned}
\iiint_B \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 4\varrho^3\sin^2\theta\sin\phi\,d\varrho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\sin\phi\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,[-\cos\phi]_0^{\pi/2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

b) Sei M der gekrümmte Teil der Oberfläche von B, und seien S_1, S_2 und S_3 die geraden Seitenflächen von B. Nach dem Satz von Gauss hat man

$$\iint_M \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO = \iiint_B \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV - \iint_{S_1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO - \iint_{S_2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO - \iint_{S_3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO.$$

Auf S_1 und S_2 ergibt $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ und auf auf S_3 ergibt

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}0\\2x^2\\-\frac{2}{3}z^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = -2x^2.$$

Bitte wenden!

Somit erhält man für

$$\begin{aligned}
\iint_M \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dO &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} -2x^2\, dz\, dx = \frac{\pi}{4} + 2\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dz\, dx \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos^2 u\, du \quad (\text{mit} \sin u = x) \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\, du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\, du\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{\pi}{4} - \left[-\frac{1}{4}\sin^3 u \cos u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\, du\right) = \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$