Musterlösungen Schnellübung 4

1. **a)** Es ist $D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3$, also einfach zusammenhängend und

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4-(-4) \\ 0-0 \\ 2x-2 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Nach Stammbach–Skript, Teil B, Kaitel VI, Satz 4 (Seite 71) ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Nach Satz 2 (Seite 69) ist $\vec{v}$ konservativ.

b) Nach Teilaufgabe a) existiert f, so dass

$$\vec{v}\,(x,y,z) = \mathbf{grad} f\,(x,y,z) \iff \begin{array}{ll} \text{(i)} & f_x\,(x,y,z) = 2xy+3 \\ \text{(ii)} & f_y\,(x,y,z) = x^2-4z \\ \text{(iii)} & f_z\,(x,y,z) = -4y. \end{array}$$

Aus (i) folgt, dass $f\,(x,y,z) = x^2y + 3x + C\,(y,z)$, wobei C eine Funktion von y und z ist. Damit ist aus (ii) $x^2 - 4z = f_y\,(x,y,z) = x^2 + C_y\,(y,z)$ oder $C_y\,(y,z) = -4z$, also $C\,(y,z) = -4yz + D(z)$, wobei D eine Funktion von z ist. Somit schreibt sich f als $f\,(x,y,z) = x^2y + 3x - 4yz + D(z)$. Aus (iii) folgt dann $-4y = f_z\,(x,y,z) = -4y + D_z(z)$ oder $D_z(z) = 0$, also $D(z) = K$ mit K eine Konstante in $\mathbb{R}$. Zusammenfassend erhalten wir

$$f\,(x,y,z) = x^2y + 3x - 4yz + K.$$

c) Da $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist (wegen Teilaufgabe a) oder b)), gilt dass (Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 68)

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = f\,(2,1,-1) - f\,(3,-1,2) \overset{\text{b)}}{=} 6.$$

2. Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist der ganze Raum $\mathbb{R}^3$, also einfach zusammenhängend, und

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 15x^{1001}y^2 - 15x^{1001}y^2 \\ 5005x^{1000}y^3 - 5005x^{1000}y^3 \\ 15\cdot 1001x^{1000}y^2z - 3\cdot 5005x^{1000}y^2z \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Bitte wenden!

Nach Satz 4 vom Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 71, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld, d.h es existiert ein Skalarfeld $f = f(x, y, z)$ mit $\mathbf{grad} f = \vec{v}$. Somit ist

$$\mathbf{grad} f(x,y,z) = \vec{v}\,(x,y,z) \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & f_x\,(x,y,z) = 5005x^{1000}y^3 z \\ \text{(ii)} & f_y\,(x,y,z) = 15x^{1001}y^2 z + 2y \\ \text{(iii)} & f_z\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3. \end{array}$$

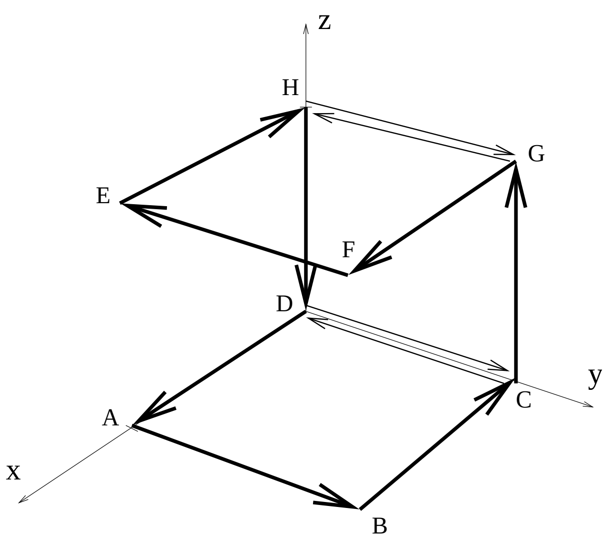
Aus (iii) folgt, dass $f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3 z + C(x,y)$, wobei C eine Funktion von x und y ist. Es folgt aus (ii), dass $15x^{1001}y^2 z + 2y = f_y\,(x,y,z) = 15x^{1001}y^2 z + C_y\,(x,y)$ oder $C_y(x,y) = 2y$, also $C(x,y) = y^2 + D(x)$ mit D eine Funktion von x. f schreibt sich damit als $f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3 z + y^2 + D(x)$. Mit (i) folgt dann, dass $5005x^{1000}y^3 z = f_x\,(x,y,z) = 5005x^{1000}y^3 z + D_x(x)$ oder $D_x(x) = 0$, also $D(x) = C$, wobei $C \in \mathbb{R}$. Zusammenfassend ist

$$f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3 z + y^2 + C.$$

Damit ist die gesuchte Arbeit A gegeben durch (Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 68)

$$A = f(Q) - f(P) = f(0,1,1) - f(1,0,1) = 1 + C - C = 1.$$

3. Wir betrachten die geschlossenen Wege $ABCDA$, $CGHDC$ respektive $GFEHG$.



Das Vektorfeld $\vec{v}$ leistet darauf die Arbeit W_{ABCD}, W_{CGHD} respektive W_{GFEH}. Da die beiden Strecken CD und GH zweimal durchlaufen werden, und zwar in entgegengesetzten Richtungen, gilt

$$W_{tot} = W_{ABCD} + W_{CGHD} + W_{GFEH}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Sei F_{ABCD} das Quadrat $ABCD$, F_{CGHD} das Quadrat $CGHD$ und F_{GFEH} das Quadrat $GFEH$. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$W_{tot} = \int_\Gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{F_{ABCD}} \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}O + \iint_{F_{CGHD}} \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}O + \iint_{F_{GFEH}} \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}O.$$

Es gilt $\mathbf{rot}\vec{v}\,(x,y,z) = (x - xy, 0, yz - z)$.
Auf F_{ABCD} ($z = 0$) ist $\vec{n} = (0,0,1) \perp \mathbf{rot}\vec{v}\,(x,y,0)$, also $W_{ABCD} = 0$ und auf F_{CGHD} ($x = 0$) ist $\vec{n} = (1,0,0) \perp \mathbf{rot}\vec{v}\,(0,y,z)$, also $W_{CGHD} = 0$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} W_{tot} &= W_{GFEH} = \iint_{F_{GFEH}} \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}O \\ &\overset{z=1}{=} \int_0^1 \int_0^1 (x - xy, 0, y-1) \cdot (0,0,-1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$