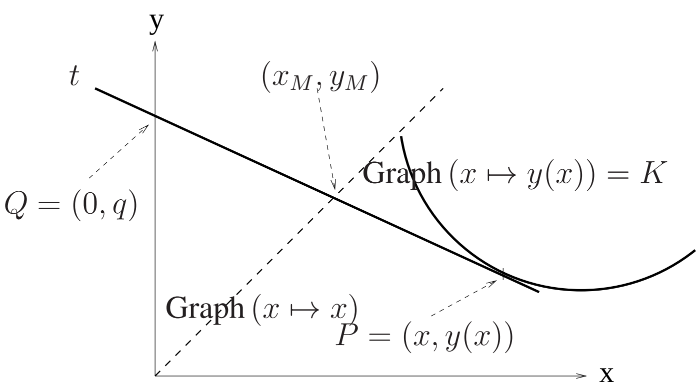
Musterlösungen Schnellübung 5

1. Sei $P = (x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt auf der Kurve K, gegeben durch $y = y(x)$ und $Q = (0, q) \in \mathbb{R}^2$.



Die Tangente t in P an die Kurve K ist gegeben durch

$$t : z \longmapsto y'(x)(z - x) + y(x).$$

Die Tangente t und soll durch $Q = (0, q)$ gehen. Also gilt

$$q = t(0) = y'(x)(0 - x) + y(x) \quad \text{, also } \; q = -y'(x)\,x + y(x). \tag{1}$$

Andererseits ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (x_M, y_M) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left[(x, y(x)) + (0, q)\right] = \frac{1}{2}(x, y(x) + q) \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(x, y(x) - y'(x)\,x + y(x)) = \left(\frac{1}{2}x, y(x) - \frac{1}{2}y'(x)x\right), \end{aligned}$$

wobei $O = (0, 0)$ ist. Da der Mittelpunkt (x_M, y_M) auf der Geraden, gegeben durch $y = x$, liegt, muss gelten $x_M = y_M$, also

$$\frac{1}{2}x = y(x) - \frac{1}{2}y'(x)x \Longleftrightarrow y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = -1 \;\; (x \neq 0),$$

d.h $y : x \longmapsto y(x)$ ist Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y' - \frac{2}{x}y = -1.$$

Bitte wenden!

Wir suchen eine allgemeine Lösung y_h der zugehörigen (separierbaren) homogenen Differenzialgleichung:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Longrightarrow \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = 2\left(\ln|x| + C\right), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow y_h\left(x\right) = Kx^2,\ K \in \mathbb{R}$$

Für die partikuläre Lösung y_p der Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x}y = -1$ machen wir folgenden Ansatz:

$$y_p\left(x\right) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $y_p'(x) = a$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x}y = -1$ oder $y'x - 2y = -x$ liefert

$$(-1) \cdot x = ax - 2(ax + b) = ax - 2ax - 2b = -ax - 2b.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $-a = -1$ und $-2b = 0$, also $a = 1$ und $b = 0$. Damit ist $y_p(x) = x$. Die allgemeine Lösung von $y' - \frac{2}{x}y = -1$ ist somit

$$y(x) = y_h\left(x\right) + y_p\left(x\right) = Kx^2 + x,\ K \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die Gleichung der Kurven, die unsere Bedingungen erfüllen.

2. Mit $u\left(x\right) = y\left(x\right)^2$ erhält man $u'\left(x\right) = 2y\left(x\right)y'\left(x\right)$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung ergibt dies

$$1 - x^2 + u = xu' \ \text{ oder } \ u' - \frac{1}{x}u = \frac{1 - x^2}{x}.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung. Wir suchen die allgemeine Lösung u_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $u' - \frac{1}{x}u = 0$ (sie ist separierbar). Es gilt

$$u' - \frac{1}{x}u = 0 \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \ln|u| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$u_h\left(x\right) = Kx, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Nun suchen wir eine partikuläre Lösung u_p der Differenzialgleichung $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$: Wir benutzen die Methode von Lagrange (Variation der Konstanten), wähle

$$u_p\left(x\right) = \gamma\left(x\right) \cdot u_h\left(x\right) = \gamma\left(x\right) \cdot Kx.$$

Siehe nächstes Blatt!

Eingesetzt in $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$ liefert

$$\gamma'(x) = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{u_h(x)} = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{Kx} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \Longrightarrow \gamma(x) = \frac{1}{K}\left(-\frac{1}{x} - x\right).$$

(Auf die Integrationskonstante kann verzichtet werden, da wir nur eine partikuläre Lösung suchen). Also ist

$$u_p(x) = \gamma(x) \cdot Kx = \frac{1}{K}\left(-\frac{1}{x} - x\right) \cdot Kx = -1 - x^2.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Kx - 1 - x^2,$$

und somit ist die allgemeine Lösung von $1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$ gegeben durch

$$y(x)^2 = u(x) = Kx - 1 - x^2, K \in \mathbb{R}.$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned} y^2 = Kx - 1 - x^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad y^2 - Kx + x^2 = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 + \underbrace{x^2 - Kx + \left(\frac{K}{2}\right)^2}_{\left(x - \frac{K}{2}\right)^2} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{K^2}{4} - 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Aus (2) folgt, dass die Lösungskurven (im Fall $\frac{K^2}{4} - 1 > 0$ oder $K^2 > 4$ oder $|K| > 2$) Kreise mit Mittelpunkt $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ und Radius $\sqrt{\frac{K^2}{4} - 1}$ sind.

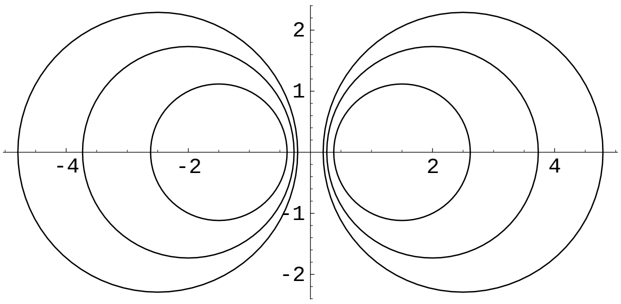


Abbildung 1: Lösungskurven für $K = -5, -4, -3, 3, 4, 5$

Bitte wenden!

3. Wir lösen zuerst die homogene Gleichung $y'' - y' - 2y = 0$. Wir berechnen die Nullstellen des charakteristischen Polynom als

$$T^2 - T - 2 = 0 \Leftrightarrow T_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow T_1 = -1,\ T_2 = 2.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also gleich

$$y_h(x) = Ce^{-x} + De^{2x}.$$

Wir lösen jetzt den inhomogenen Teil.

a) Der Ansatz der partikulären Lösung ist $y_p(x) = Ax + B$, wobei A, B Konstanten sind. Wir setzen den Ansatz in die Differenzialgleichung ein und erhalten

$$0 - A - 2(Ax + B) = x.$$

Ein Koeffizientenvergleich gibt $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{4}$. Die partikuläre Lösung lautet also

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4},$$

und die allgemeine Lösung ist gleich

$$y(x) = Ce^{-x} + De^{2x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Bemerkung: Eine partikuläre Lösung darf auch mit der Lagrange'schen Ansatz (Variation der Konstanten) wie folgt gefunden werden:
Ansatz (Variation der Konstanten):

$$y_p(x) = C(x)e^{-x} + D(x)e^{2x}.$$

Aus den Gleichungen (s. U. Stammbach, Analysis, Teil C, Kap. VII.9, Seite 79)

$$C'(x)e^{-x} + D'(x)e^{2x} = 0 \quad \text{(Nebenbedingung)}$$

$$-C'(x)e^{-x} + 2D'(x)e^{2x} = x$$

lassen sich die unbekannten Funktionen $C(x)$ und $D(x)$ gewinnen. Die erste summiert mit der zweiten Gleichung liefert

$$D'(x) = \frac{x}{3e^{2x}}$$

und durch einer partiellen Integration kriegen wir (ohne zusätzlichen Konstanten, da wir nur eine Lösung brauchen)

$$D(x) = (-\frac{1}{6}x - \frac{1}{12})e^{-2x}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Einsetzung in der ersten Gleichung liefert

$$C'(x) = -\frac{x}{3}e^x,$$

und nach einer partiellen Integration kriegen wir

$$C(x) = -\frac{1}{3}(x-1)e^x.$$

Einsetzung im ansatz liefert eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = C(x)e^{-x} + D(x)e^{2x} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

b) Der Ansatz der partikulären Lösung ist $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$, wobei A, B Konstanten sind. Wir setzen den Ansatz in die Differenzialgleichung ein und erhalten:

$$-A\sin(x) - B\cos(x) - (A\cos(x) - B\sin(x)) - 2(A\sin(x) + B\cos(x)) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow (B-3A)\sin(x) + (-3B-A)\cos(x) = \sin(x).$$

Ein Koeffizientenvergleich gibt $A = -\frac{3}{10}$ und $B = \frac{1}{10}$. Die partikuläre Lösung lautet also

$$y_p(x) = -\frac{3}{10}\sin(x) + \frac{1}{10}\cos(x),$$

und die allgemeine Lösung ist gleich

$$y(x) = Ce^{-x} + De^{2x} - \frac{3}{10}\sin(x) + \frac{1}{10}\cos(x).$$