Musterlösungen Schnellübung 6

1. **a)** Es gilt $f^{(n)}(x) = f(x)$ mit $n \geq 0$. Also gilt im Punkt $x = 1$

$$f^{(n)}(1) = e.$$

Damit ist die Taylorreihe von $f(x)$ um $x = 1$

$$f(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \ldots = e\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}\right).$$

b) Es gilt

$$f'(x) = 6x^5,\ f''(x) = 6 \cdot 5x^4, \ldots, f^{(n)} = \frac{6!}{(6-n)!}x^{6-n}$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Damit ist die Taylorreihe von $f(x)$ um $x = 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{6} \frac{6!}{n!(6-n)!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{6} \binom{6}{n}(x-1)^n.$$

Alternativ findet man direkt

$$f(x) = x^6 = ((x-1)+1)^6 = \sum_{n=0}^{6} \binom{6}{n}(x-1)^n 1^{6-n} = \sum_{n=0}^{6} \binom{6}{n}(x-1)^n.$$

c) Betrachten wir die Taylorreihe von $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ um $x = 0$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) \\ &\overset{!}{=} \cos(x) + i\sin(x). \end{aligned}$$

Somit ist die Taylorreihe von $\sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Die Taylorreihe von $\sin(x^3)$ ist dann

$$\sin(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!}.$$

Bitte wenden!

2. **a)** Es gilt

$$\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3-x}\right) \tag{1}$$

(d.h. $\frac{1}{3-x}$ ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{(x-3)^2}$). Weiter gilt

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3} \overset{(*)}{=} \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} x^k, \tag{2}$$

wobei wir in $(*)$ die geometrische Reihe benutzt haben ($q = \frac{x}{3}$) und, dass $|x| < 3 \Rightarrow \left|\frac{x}{3}\right| < 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3-x}\right) &\overset{(2)}{=} \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} x^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} kx^{k-1} \overset{l=k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{l+2}(l+1)\,x^l. \end{aligned} \tag{3}$$

Wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{1}{(x-3)^2} \overset{(1)}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3-x}\right) \overset{(3)}{=} \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{l+2}(l+1)\,x^l.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$a_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}(k+1)\,, \quad k = 0,1,2,\dots\,.$$

b) Es gilt

$$\frac{5}{-x^2+x+6} = \frac{-5}{x^2-x-6} = \frac{-5}{(x-3)\,(x+2)}. \tag{4}$$

Wir wollen nun (4) schreiben als

$$\frac{-5}{(x-3)\,(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\frac{-5}{(x-3)\,(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)\,x + (2A-3B)}{(x-3)\,(x+2)}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{array}{lll} (I) & A+B=0 & \Longrightarrow\ B=-A \quad (III) \\ (II) & 2A-3B=-5 & \overset{(III)}{\Longrightarrow}\ A=-1. \end{array}$$

Siehe nächstes Blatt!

Also mit (III) ist $B = 1$. Wir erhalten

$$\frac{5}{-x^2 + x + 6} = \frac{-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{1}{x+2}. \tag{5}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{x-3} + \frac{1}{x+2} &= \frac{1}{3-x} - \frac{1}{-x-2} = \frac{1}{3-x+1-1} - \frac{1}{-2-x+1-1} \\
&= \frac{1}{2-(x-1)} - \frac{1}{-3-(x-1)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(x-1)/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(x-1)/(-3)} \\
&\overset{|x-1|<2}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{-3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (x-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} (x-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right] (x-1)^k . \qquad (6)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k &= \frac{5}{-x^2+x+6} \overset{(5)}{=} \frac{-1}{x-3} + \frac{1}{x+2} \\
&\overset{(6)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right] (x-1)^k .
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergeich ergibt

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

3. Es gilt:

$$f'(x) = \cos(\pi x^2), \quad f''(x) = -2\pi x \sin(\pi x^2), \quad f'''(x) = -2\pi \sin(\pi x^2) - 4\pi^2 x^2 \cos(\pi x^2).$$

Also

$$a_0 = f(1) = \int_1^1 \cos(\pi t^2) dt = 0, \quad a_1 = f'(1) = -1, \quad a_2 = f''(1)/2 = 0, \quad a_3 = \frac{f'''(1)}{6} = 2\pi^2/3$$

und

$$P_3(x) = -(x-1) + \frac{2}{3}\pi^2 (x-1)^3.$$