Musterlösungen Online Zwischentest - Serie 10

Frage 1

[Prüfungsaufgabe Frühling 2011)] Sei das Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\right)$$

und der Bereich $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq x^2 \text{ und } 0 \leq z \leq 1-y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ (von innen nach aussen) durch ∂B.

- √ ○ $\frac{16}{21}$
- ○ $-\frac{16}{21}$
- ○ $\frac{3}{4}$
- ○ $-\frac{3}{4}$

Wir berechnen zuerst div $\vec{v} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$ und erhalten mit dem Satz von Gauss für den Fluss

$$\begin{aligned}\Phi &= \iiint_B 1\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y^2} 1\,dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} 1-y^2\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{3}x^6\,dx = \frac{16}{21}.\end{aligned}$$

Frage 2

[Prüfungsaufgabe Frühling 2011] Gegeben sei das Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = (y,z,x)$$

und der Weg γ als Schnittkurve der beiden Flächen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ mit $R \in \mathbb{R}$ und $x + y + z = 1$. Wie gross ist der Absolutbetrag der Arbeit A des Vektorfeldes $\vec{v}$ längs des Weges γ in Abhängigkeit von R.

○

$$|A| = \begin{cases} \left(R^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi & \text{falls } R \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ 0 & \text{falls } 0 \leq R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

√ ○

$$|A| = \begin{cases} \sqrt{3}\left(R^2 - \frac{1}{3}\right)\pi & \text{falls } R \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ 0 & \text{falls } 0 \leq R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Da γ ein geschlossener Weg ist, verwenden wir den Satz von Stokes und erhalten

$$|A| = |\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{r}| = |\iint_S \operatorname{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\, dS|,$$

wobei $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ der Einheisnormalenvektor auf die von γ eingeschlossene Fläche

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

ist. Mit $\operatorname{rot}\vec{v} = -(1,1,1)$ folgt

$$|A| = \frac{3}{\sqrt{3}} \iint_S 1\, dS = \sqrt{3}|S|$$

Nun ist S eine Kreisscheibe mit Radius $r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}}$ und wir erhalten

$$|A| = \begin{cases} \sqrt{3}\left(R^2 - \frac{1}{3}\right)\pi & \text{falls } R \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ 0 & \text{falls } 0 \leq R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Frage 3

Klicken Sie die **richtige** Antwort an:

Die Differenzialgleichung $s(x,y) = t(x,y) \cdot y'$ ist exakt, falls

- ◯ $s_y(x,y) \equiv t_x(x,y)$.
- ◯ $s_x(x,y) \equiv t_y(x,y)$.
- √ ◯ $s_y(x,y) \equiv -t_x(x,y)$.
- ◯ $s_x(x,y) \equiv -t_y(x,y)$.
- ◯ $s_x(x,y) \equiv -\frac{1}{t_y(x,y)}$.

Die Differenzialgleichung $s(x,y) - t(x,y) \cdot y' = 0$ ist genau dann exakt, wenn $s_y(x,y) \equiv -t_x(x,y)$ (vgl. Stammbach, Analysis, Kap. VII.6).

Frage 4

Welche der folgenden Differenzialgleichungen ist linear?

- ◯ $(y' - 2)^2 = y$
- √ ◯ $y'' + \dfrac{y'}{1-x^2} + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{x^2}$
- ◯ $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$
- ◯ $y'' + y' + y^2 = 0$
- ◯ $y = xy' + (y')^2$

Frage 5

Wie lautet die charakteristische Gleichung der DGL $y''' + 2y' + y = 0$?

- √ ◯ $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$
- ◯ $\lambda^3 + 2\lambda = 0$
- ◯ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
- ◯ $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$

Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung (oder das charakteristische Polynom) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$.

Frage 6

Gegeben ist die Differenzialgleichung $y'' - 2y' + y = 0$. Welche ist die allgemeine Lösung?

○ $y(x) = e^x + e^{-x} + C_0$

○ $y(x) = e^x + xe^x + C_0$

○ $y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3$

√ ○ $y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x$

○ $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Die Differenzialgleichung ist linear mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 1$; deswegen ist

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x$$

ihre allgemeine Lösung (vgl. Kap. VII.10, S. 84).

Frage 7

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y''' + y' = 0$ ist gleich...

○ $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

○ $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3$

○ $y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3$

○ $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

√ ○ $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3$

1. Möglichkeit:
Das charakteristische Polynom $\lambda^3 + \lambda$ hat Nullstellen $\lambda = \pm i$ und $\lambda = 0$. Die allgemeine Lösung ist also gleich (vgl. Kap. VII.10, S. 85)

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{0x} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3.$$

2. Möglichkeit:
Die Substitution $v(x) = y'(x)$ liefert die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$v'' + v = 0$$

mit charakteristischen Polynom $\lambda^2 + 1$ mit Nullstellen $\pm i$ und allgemeinen Lösung

$$v(x) = A \cos x + B \sin x.$$

Die allgemeine Lösung von $y''' + y' = 0$ ist also gleich

$$y(x) = \int v(x)\, dx = A \cos x - B \sin x + C_3 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3.$$

Frage 8

Gegeben sei eine inhomogene lineare Differenzialgleichung mit Störglied $q(x)$, also z. B. $y'' + x^2y' + (\sin x)y = q(x)$. Es sei $y_0 : x \to y_0(x)$ eine Lösung. Kann daraus in einfacher Weise eine Lösung der Differenzialgleichung $y'' + x^2y' + (\sin x)y = 3q(x)$ konstruiert werden? Und, falls ja, wie?

○ Nein. Dies ist nicht in einfacher Weise möglich.

○ Ja, die Funktion $x \to (y_0(x))^3$ ist eine Lösung.

√ ○ Ja, die Funktion $x \to 3y_0(x)$ ist eine Lösung.

○ Ja, die Funktion $x \to 3xy_0(x)$ ist eine Lösung.

Frage 9

Welche der folgenden Aussagen über die Differenzialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist falsch?

○ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.

○ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.

○ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.

○ Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to \infty$.

√ ○ Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to -\infty$.

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$ mit den einfachen Nullstellen -2 und -1, also lautet die allgemeine Lösung $y = Ae^{-2x} + Be^{-x}$ für Konstanten A und B. Dann ist $y(0) = A + B$ und $y(1) = Ae^{-2} + Be^{-1}$. Für beliebige Randwerte $y(0)$ und $y(1)$ sind diese Gleichungen simultan lösbar; somit sind die Aussagen (a) bis (c) richtig. Auch (d) ist richtig, weil es eine Lösung mit diesem Startwert gibt und jede (!) Lösung für $x \to \infty$ beschränkt bleibt. Dagegen geht jede von Null verschiedene Lösung für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$; deshalb ist (e) falsch. Die korrekte Antwort lautet also (e).

Frage 10

Welche der folgenden Aussagen über die Differenzialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist falsch?

- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.
- √ ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.
- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Aussagen (a) und (d) sind richtig nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz – sogar ohne jede Rechnung. In (c) ist dagegen eine Nebenbedingung zuwenig, und nach demselben Satz existiert zu jedem beliebigen zweiten Startwert $y'(0)$ eine Lösung. Es existieren also unendlich viele Lösungen in (c), und deshalb ist die Aussage (c) falsch. In (b) ist zwar eine Nebenbedingung zuviel, und das kann im allgemeinen dazu führen, dass keine Lösung existiert. Das Beispiel war aber gerade so gewählt, dass es eine gibt, nämlich $e^{-x} - e^{-2x}$, wie man durch Ansatz und Koeffizientenvergleich feststellt, so dass (b) in diesem Fall richtig ist. Die korrekte Antwort lautet also (c).

Frage 11

Welche der folgenden Aussagen über lineare DGLn 2. Ordnung sind korrekt?

√ ◯ Die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + y = 0$ ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Richtig. Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$. Wegen der doppelten reellen Nullstelle -1 ist die allgemeine Lösung wie angegeben.

◯ Die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + y = 0$ ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}$.

Nein, s. Erläuterung bei Alternativantwort.

◯ Die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$ (mit $\omega \neq 0$ konstant) ist

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 x e^{-\omega x}.$$

Nein, s. Erläuterung bei Alternativantwort.

√ ◯ Die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$ (mit $\omega \neq 0$ konstant) ist

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}.$$

Richtig. Eine Begründung liefert wieder die charakteristische Gleichung, $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, mit zwei reellen Nullstellen $\lambda = \pm\omega$.
Alternative mit direkter Rechung: Es gilt $(e^{\omega x})'' = (\omega e^{\omega x})' = \omega^2 e^{\omega x}$ und $(e^{-\omega x})'' = (-\omega e^{-\omega x})' = \omega^2 e^{-\omega x}$. Daher sind $e^{\omega x}$ und $e^{-\omega x}$ Lösungen von $y'' - \omega^2 y = 0$. Die Wronski-Determinante

$$W(e^{\omega x}, e^{-\omega x}) = -\omega e^{\omega x} e^{-\omega x} - \omega e^{-\omega x} e^{\omega x} = -2\omega \neq 0,$$

und da damit diese beiden Funktionen linear unabhängig sind und $y'' - \omega^2 y = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, müssen diese Funktionen den Lösungsraum von $y'' - \omega^2 y = 0$ aufspannen.

Frage 12

Lösen Sie die folgende Differenzialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}.$$

Hinweis:
Verwenden Sie das Verfahren von Lagrange um eine partikuläre Lösung zu bestimmen.

- ◯ $y(x) = (c_1 + xc_2 + 2x^3)e^{-x}$.
- √ ◯ $y(x) = (c_1 + xc_2 + 2x^2)e^{-x}$.
- ◯ $y(x) = (c_1 + x^2c_2 + 2x^2)e^{-x}$.

Die Differenzialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \tag{1}$$

ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir suchen zuerst die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differenzialgeichung

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{2}$$

Den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, eingesetzt in (2) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) \\ \Longrightarrow p(\lambda) &:= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0. \end{aligned}$$

$p(\lambda)$ (das charakteristische Polynom von (2)) besitzt eine doppelte Nullstelle $\lambda = -1$. Wir erhalten somit die zwei linear unabhängige Lösungen von (2)

$$y_1(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = xe^{-x}. \tag{3}$$

[Sei

$$0 = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 x e^{-x}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Zu zeigen ist, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, damit y_1 und y_2 linear unabhängig sind. Setze $x = 0$ in (4)

$$\alpha_1 = 0. \tag{5}$$

Setze $x = 1$ in (4)

$$0 = \alpha_1 \frac{1}{e} + \alpha_2 \frac{1}{e} \overset{(5)}{\Longrightarrow} \alpha_2 = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ist. Es ist leicht nachzuprüfen, dass y_1 und y_2 Lösungen von (2) sind (setzen Sie einfach die Funktionen y_1 und y_2 in die Differenzialgleichung (2) ein).
Wichtig: Ist λ eine m–fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = 0, \quad c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

mit $m \geq 1$, so sind die m Funktionen

$$e^{\lambda x},\, xe^{\lambda x}, \ldots,\, x^{m-1}e^{\lambda x}$$

linear unabhängige Lösungen von (6).]

Die allgemeine Lösung von (2) ist somit gegeben durch

$$y_h\left(x\right) = C_1 y_1\left(x\right) + C_2 y_2\left(x\right) \overset{(3)}{=} \left(C_1 + C_2 x\right) e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Wir suchen nun eine partikuläre Lösung y_p von (1). Dazu verwenden wir das Verfahren von Lagrange und machen den Ansatz

$$y(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \gamma_2(x) y_2(x).$$

$\gamma_1(x)$ und $\gamma_2(x)$ lassen sich durch

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) y_1(x) + \gamma_2'(x) y_2(x) &= 0 \\ \gamma_1'(x) y_1'(x) + \gamma_2'(x) y_2'(x) &= q(x), \end{aligned}$$

wobei $q(x)$ die Inhomogenität ist, gewinnen (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 79–80).

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) e^{-x} + \gamma_2'(x) x e^{-x} &= 0 \\ -\gamma_1'(x) e^{-x} + \gamma_2'(x) \left(e^{-x} - x e^{-x}\right) &= 4e^{-x} \\ \Longrightarrow \gamma_2' e^{-x} = 4e^{-x} \quad \Longrightarrow \gamma_2' = 4 \quad \Longrightarrow \gamma_2 &= 4x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow \gamma_1' = -4x \quad \Longrightarrow \gamma_1 &= -2x^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (1) ist dann gegeben durch

$$y(x) = (-2x^2 + c_1) e^{-x} + (4x + c_2) x e^{-x} = (c_1 + x c_2 + 2x^2) e^{-x}.$$

Frage 13

Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differenzialgleichung

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

ist gleich...

- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x\ln x + C_3x(\ln x)^2$
- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x^2$
- ◯ $y(x) = C_1x\ln x + C_2(\ln x)^2$
- √ ◯ $y(x) = C_1x + C_2x\ln x$

Das Indexpolynom

$$T(T-1) - T + 1 = T^2 - 2T + 1 = (T-1)^2$$

hat die doppelte reelle Nullstelle $T = 1$. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist also

$$y(x) = C_1x + C_2x\ln x$$

(Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 87).

Frage 14

Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differenzialgleichung

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

ist gleich...

- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x\ln x$
- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x(\ln x)^2$
- √ ◯ $y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)$
- ◯ $y(x) = C_1x\cos(\ln x) + C_2x\sin(\ln x)$

Das Indexpolynom

$$T(T-1) + T + 1 = T^2 + 1 = (T+i)(T-i)$$

hat die zwei konjugiert komplexe Nullstellen $T = \pm i$. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist also

$$y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)$$

(Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 87).

Frage 15

Untersucht man die stationäre Temperaturverteilung auf einer homogenen Kreisscheibe oder auf einem homogenen Kreisring, so tritt die folgende Differentialgleichung für $y(r)$ auf:

$$y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{m^2}{r^2}y = 0.$$

Dabei bezeichnet r den Abstand vom Mittelpunkt der Kreisscheibe, und m ist eine beliebige natürliche Zahl. Klicken Sie die richtigen Aussagen an.

√ ○ Die Differentialgleichung ist homogen, linear und Euler'sch.

○ Das Indexpolynom lautet $T^2 + T - m^2$.

○ Die allgemeine Lösung lautet $y(r) = C_1 r^m + C_2 r^{-m}$, für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, für alle $m \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

Das Indexpolynom lautet $T(T-1) + T - m^2 = T^2 - m^2$. Ist $m > 0$, so sind $T = \pm m$ die beiden Nullstellen des Indexpolynoms. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall

$$y(r) = C_1 r^m + C_2 r^{-m},$$

für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ist $m = 0$, so ist $T = 0$ eine doppelte Nullstelle des Indexpolynoms und die allgemeine Lösung lautet

$$y(r) = C_1 + C_2 \ln r,$$

für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Frage 16

Für welche Werte des Parameters $b \in \mathbb{R}$ bleiben alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$x^2 y'' + (1-2b)\, xy' + b^2 y = 0$$

für $x \to \infty$ beschränkt?

- ◯ $b < 1$
- √ ◯ $b < 0$
- ◯ $b \in \mathbb{R}$
- ◯ $b \leq 0$

Es handelt sich um eine homogene Eulersche Differenzialgleichung (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 86), da

$$x^2 y'' + (1-2b)\, xy' + b^2 y = 0 \Longleftrightarrow y'' + \frac{1-2b}{x} y' + \frac{b^2}{x^2} y = 0 \;\; (x \neq 0). \tag{8}$$

Den Ansatz $y(x) = x^T$ in (8) eingesetzt, liefert uns das folgende Indexpolynom

$$0 = T\,(T-1) + (1-2b)\, T + b^2 = T^2 - 2bT + b^2 = (T-b)^2\,.$$

Das Indexpolynom besitzt also eine zweifache Nullstelle $T = b$. Wegen Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 87, erhalten wir 2 linear unabhängige Lösungen von (8)

$$y_1\,(x) = x^b \;\text{ und }\; y_2\,(x) = (\ln x)\, x^b.$$

Die allgemeine Lösung von (8) ist nach Satz 9.2 (Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 75)

$$y(x) = C_1 y_1\,(x) + C_2 y_2\,(x) = C_1 x^b + C_2\,(\ln x)\, x^b, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$ für $k > 0$ (siehe Stammbach–Skript, Teil A, Kapitel II, Seite 55) bleiben für $b < 0$ sämtliche Lösungen beschränkt, konvergieren sogar gegen Null.

Frage 17

Die Substitution

$$y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

in der Differenzialgleichung

$$x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

liefert...

- ○ $x^2g + 2xg' + g'' = -2\cos x$
- ○ $-x^2g + 2xg' + g'' = -2\cos x$
- √ ○ $g'' - g = -2\cos x$
- ○ $g'' - xg' = -2\cos x$

Mit $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ folgt

$$\begin{aligned} y'(x) &= g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + g(x)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \big(g'(x) - xg(x)\big)\,e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y''(x) &= \big(g''(x) - g(x) - xg'(x)\big)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + \big(g'(x) - xg(x)\big)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \big(g''(x) + \big(x^2-1\big)\,g(x) - 2xg'(x)\big)\,e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

In die Differenzialgleichung $x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned} x^2ge^{-\frac{x^2}{2}} + 2x\big(g' - xg\big)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + \big(g'' + \big(x^2-1\big)\,g - 2xg'\big)\,e^{-\frac{x^2}{2}} &= -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \Longleftrightarrow g'' - g &= -2\cos x. \end{aligned}$$

Frage 18

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung

$$x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

durch Verwendung des Ansatzes $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- ◯ $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (c_1e^x + c_2e^x + \cos x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- ◯ $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \cos x\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- √ ◯ $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (c_1e^x + c_2e^{-x} + \cos x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Mit $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ folgt

$$\begin{aligned}
y'(x) &= g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + g(x)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \big(g'(x) - xg(x)\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\
y''(x) &= \big(g''(x) - g(x) - xg'(x)\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}} + \big(g'(x) - xg(x)\big)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= \big(g''(x) + \left(x^2 - 1\right) g(x) - 2xg'(x)\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned}$$

In die Differenzialgleichung $x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
x^2ge^{-\frac{x^2}{2}} + 2x\left(g' - xg\right) e^{-\frac{x^2}{2}} + \left(g'' + \left(x^2 - 1\right) g - 2xg'\right) e^{-\frac{x^2}{2}} &= -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\
\Longleftrightarrow g'' - g &= -2\cos x.
\end{aligned}$$

Wir suchen also die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $g'' - g = -2\cos x$. Wir suchen zunächst nach der allgemeinen Lösung g_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $g'' - g = 0$. Das charakteristische Polynom ist $0 = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$, und somit erhalten wir

$$g_h(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Um eine partikuläre Lösung g_p von $g'' - g = -2\cos x$ zu finden, setze

$$g_p(x) = A\cos x + B\sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt

$$g_p'(x) = -A\sin x + B\cos x \quad \text{und} \quad g_p''(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Eingesetzt in $g'' - g = -2\cos x$ ergibt

$$\begin{aligned}
&-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = -2A\cos x - 2B\sin x = -2\cos x \\
&\Longleftrightarrow (2 - 2A)\cos x - 2B\sin x = 0 \ \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \qquad (9)
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ schreibt sich (9) als $2 - 2A = 0$, also $A = 1$. Für $x = \frac{\pi}{2}$ schreibt sich (9) als $-2B = 0$, also $B = 0$. Damit ist $g_p(x) = \cos x$. Die allgemeine Lösung von $g'' - g = -2\cos x$ ist somit

$$g(x) = g_h(x) + g_p(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \cos x.$$

Die allgemeine Lösung der ursprüglichen Differenzialgleichung $x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist damit

$$y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(c_1e^x + c_2e^{-x} + \cos x\right) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$