Musterlösungen Serie 11

1. **Frage 1**

Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + y'' + y' + y + x + 1 = 0$$

mit $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

○ $y(x) = e^{-x} + 3\sin x$

○ $y(x) = e^{-x} + 3\cos x - x$

○ $y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x$

√ ○ $y(x) = e^{-x} + 3\sin x - x$

Das charakteristische Polynom lautet $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \frac{\alpha^4-1}{\alpha-1}$ und hat die Nullstellen $-1, \pm i$. Eine partikuläre Lösung ist $y_{\mathrm{p}}(x) = -x$.
Die allgemeine Lösung lautet somit $y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x$.
Die Anfangsbedingungen geben $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 3$.
Die gesuchte Lösung ist also $y(x) = e^{-x} + 3\sin x - x$.

Frage 2

Es ist das folgende autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + 3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

von linearen Differenzialgleichungen 1. Ordung gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

○ Es gibt keinen Gleichgewichtspunkt.

○ $(0, 0)$ ist Gleichgewichtspunkt.

√ ○ $(1, -2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

○ $(-1, 2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

Bitte wenden!

Frage 3

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, so dass $(0,0)$ im folgenden System ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -x(t) + \frac{1}{4}y(t) \\ \dot{y}(t) &= sx(t) - y(t)\,. \end{cases}$$

○ $s \leq 0$

√ ○ $s \leq 4$

○ $0 \leq s \leq 4$

Da $x(t) = 0$ und $y(t) = 0$ eine konstante Lösung unseres Systems ist für alle $s \in \mathbb{R}$, ist $(0,0)$ ein Gleichgewichtspunkt unseres Systems. Es bleibt $s \in \mathbb{R}$ zu finden, so dass $(0,0)$ stabil ist. Wir können das System folgendermassen schreiben

$$\dot{u}(t) = Au(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ s & -1 \end{pmatrix} u(t)\,, \text{ mit } u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & \frac{1}{4} \\ s & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - \frac{1}{4}s.$$

Damit sind die Eigenwerte gegeben durch

$$\lambda_1 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{s} \text{ und } \lambda_2 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{s}.$$

Nach Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite $116(1.)$ und Seite $120(4.3)$ gilt: Der Punkt $(0,0)$ ist stabil, falls $\mathrm{Re}(\lambda_1) \leq 0$ und $\mathrm{Re}(\lambda_2) \leq 0$. In unserem Fall ist $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sei nun $s \leq 0$, dann ist $\mathrm{Re}(\lambda_1) = -1 < 0$. Falls $s > 0$, dann ist $\mathrm{Re}(\lambda_1) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{s} \leq 0$ genau dann, wenn $s \leq 4$. Also gilt insgesamt $\mathrm{Re}(\lambda_1) \leq 0$ für $s \leq 4$. Damit ist für $s \leq 4$ der Punkt $(0,0)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt unseres Systems.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 4

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem für die Funktionen $x : t \mapsto x(t)$, $y : t \mapsto y(t)$ und $z : t \mapsto z(t)$

$$\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & x+y+z \\ \dot{z} & = & y\end{array} \quad .$$

○ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^2 + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1}$

○ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

√ ○ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

Dieses System kann geschrieben werden als

$$\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & x+y+z \\ \dot{z} & = & y\end{array} \iff \dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte λ_1, λ_2 bzw. λ_3 und die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ bzw. $\begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ von $A \left(I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \left[(1-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot 1 \right] - \left[1 \cdot (-\lambda) - 0 \cdot 1 \right] = -\lambda \left(-\lambda + \lambda^2 - 1 \right) + \lambda \\ &= -\lambda \left(\lambda^2 - \lambda - 2 \right) = -\lambda (\lambda - 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$. Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich aus

$$(A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Kern}(A).$$

Um den Kern von A zu berechnen, bringen wir die Matrix A auf Zeilenstufenform

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{A}.$$

Bitte wenden!

Es folgt

$$\begin{aligned}
\text{Kern}\,(A) &= \text{Kern}\left(\widetilde{A}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \widetilde{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, a + b + c = 0,\, b = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, c = -a\,,\, b = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Man nimmt zum Beispiel

$$\widetilde{\mathbf{z}}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Kern}\,(A)\,. \tag{1}$$

Beachten Sie, dass die Wahl $a = 0$ nicht zulässig ist, da der Eigenvektor nach Definition nicht Null sein darf.

$$(A - \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um den Kern von $A - \lambda_2 I_3$ zu berechnen, bringen wir die Matrix $A - \lambda_2 I_3$ auf Zeilenstufenform

$$(A - \lambda_2 I_3) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\text{Kern}\,(A - \lambda_2 I_3) = \text{Kern}\left(\widetilde{B}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \widetilde{B} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, d - e + f = 0\,,\, -e + 2f = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, d = f\,,\, e = 2f \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 2f \\ f \end{pmatrix} \middle|\, f \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\, f \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Man nimmt zum Beispiel

$$\widetilde{\mathbf{z}}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Kern}\,(A - \lambda_2 I_3)\,. \tag{2}$$

$$(A - \lambda_3 I_3) \begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um den Kern von $A - \lambda_3 I_3$ zu berechnen, bringen wir die Matrix $A - \lambda_3 I_3$ auf Zeilenstufenform

$$A - \lambda_3 I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{C}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\text{Kern}\,(A-\lambda_3 I_3) = \text{Kern}\left(\widetilde{C}\right) = \left\{\begin{pmatrix} g\\ h\\ j\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \widetilde{C}\begin{pmatrix} g\\ h\\ j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}\\
= \quad &\left\{\begin{pmatrix} g\\ h\\ j\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, g+h=0\,,\ h+j=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} g\\ h\\ j\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, h=-g\,,\ j=-h=g\right\}\\
= \quad &\left\{\begin{pmatrix} g\\ -g\\ g\end{pmatrix} \,\middle|\, g\in\mathbb{R}\right\} = \left\{g\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \,\middle|\, g\in\mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Man nimmt zum Beispiel

$$\widetilde{\mathbf{z}}_3 := \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \in \text{Kern}\,(A-\lambda_3 I_3)\,. \tag{3}$$

Wir erhalten drei linear unabhängige Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_1(t) &= \widetilde{\mathbf{z}}_1 e^{\lambda_1 t} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} e^{0\cdot t} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\\
\mathbf{z}_2(t) &= \widetilde{\mathbf{z}}_2 e^{\lambda_2 t} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} e^{2t}\\
\mathbf{z}_3(t) &= \widetilde{\mathbf{z}}_3 e^{\lambda_3 t} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} e^{-1\cdot t}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist somit

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}(t) &= \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = C_1\mathbf{z}_1(t) + C_2\mathbf{z}_2(t) + C_3\mathbf{z}_3(t)\\
&= C_1\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} e^{2t} + C_3\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} e^{-t}.
\end{aligned}$$

2. **a)** Dieses System kann geschrieben werden als

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 2\\ -4 & 6\end{pmatrix} z = Az \quad \text{für } z = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 und die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ bzw. $\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ von A $\left(E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$

$$0 = \det(A-\lambda E_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2\\ -4 & 6-\lambda\end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich aus

$$(A-\lambda_1 E_2)\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2\\ -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow a = b.$$

Bitte wenden!

Damit ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_1 gegeben durch $E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ und somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1. Analog berechnen wir

$$(A - \lambda_2 E_2)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow 2c = d.$$

Damit ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_2 gegeben durch $E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ und somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_2. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ist, ist $z_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ eine Lösung von $\dot{z} = Az$. (Genauer: Sei $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, dann gilt $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt durch Multiplikation von e^{2t} beidseitig, dass $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$, also $\dot{z}_1(t) = Az_1(t)$, d.h. $t \longmapsto z_1(t)$ ist eine Lösung von $\dot{z} = Az$). Analog gilt, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ ist, ist $z_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$ eine Lösung von $\dot{z} = Az$. Da z_1 und z_2 linear unabhängig sind, gilt

$$z(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \beta e^{4t} \\ \alpha e^{2t} + 2\beta e^{4t} \end{pmatrix}$$

oder, da $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{4t} \;\text{ und }\; y(t) = \alpha e^{2t} + 2\beta e^{4t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung von $\dot{z} = Az$. Wir bestimmen noch die Konstanten α und β

$$1 = x(0) = \alpha + \beta \quad \text{und} \quad 2 = y(0) = \alpha + 2\beta, \quad \text{es folgt} \quad \alpha = 0, \beta = 1.$$

Die gesuchte Lösung des Systems ist somit

$$x(t) = e^{4t} \;\text{ und }\; y(t) = 2e^{4t}.$$

<u>Andere Methode:</u>
Wir suchen eine Transformationsmatrix T, welche

$$A = TDT^{-1}$$

erfüllt, für eine Diagonalmatrix D. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;\text{ und }\; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(die Eigenvektoren bilden die Spalten von T und die Eigenwerte bilden die Diagonalelemente von D), und dass die Inverse von T gegeben ist durch

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Sei $u := T^{-1}z$ (also $z = Tu$), dann folgt wegen $A = TDT^{-1}$ und $\dot{z} = Az$, dass $\dot{z} = TDT^{-1}z \Longleftrightarrow T^{-1}\dot{z} = DT^{-1}z \Longleftrightarrow \dot{u} = Du$. Also mit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcl} \dot{u}_1(t) & = & 2u_1(t) \\ \dot{u}_2(t) & = & 4u_2(t) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} u_1(t) & = & ae^{2t},\, a \in \mathbb{R} \\ u_2(t) & = & be^{4t},\, b \in \mathbb{R} \end{array} \Longleftrightarrow u(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{4t} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$z(t) = Tu(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} + 2be^{4t} \end{pmatrix}.$$

Dies ist dasselbe Resultat wie bei der ersten Methode.

b) Dieses System kann geschrieben werden als

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} z = Az \quad \text{für } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 und die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ bzw. $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ von A

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 2 + i$ und $\lambda_2 = 2 - i$. Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich aus

$$(A - \lambda_1 E_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = ib.$$

Damit ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_1 gegeben durch $E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$ und somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1. Analog berechnen wir

$$(A - \lambda_2 E_2) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow d = ic.$$

Damit ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_2 gegeben durch $E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}$ und somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_2. Analog wie in Teilaufgabe a) erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{z} = Az$

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} \quad \text{und} \quad z_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(2-i)t}$$

(Bemerke, dass $z_2(t) = \overline{z_1}(t)$). Es folgt, dass die komplexe allgemeine Lösung von $\dot{z} = Az$ gegeben ist durch

$$z(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(2-i)t}$$

oder, da $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$x(t) = e^{2t}\left(\alpha e^{it} + \beta e^{-it}\right) \quad \text{und} \quad y(t) = e^{2t}\left(-\alpha i e^{it} + \beta i e^{-it}\right).$$

Bitte wenden!

Sind wir nur an reellen Lösungen interessiert, so fahren wir folgendermassen fort (Vergleiche Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 85). Es gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{z_1}(t) &= \frac{z_1(t)+z_2(t)}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(2-i)t}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{2t}\begin{pmatrix} e^{it}+e^{-it} \\ -ie^{it}+ie^{-it} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{2t}\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
\widetilde{z_2}(t) &= \frac{z_1(t)-z_2(t)}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} - \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(2-i)t}\right] \\
&= \frac{1}{2i}e^{2t}\begin{pmatrix} e^{it}-e^{-it} \\ -ie^{it}-ie^{-it} \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}e^{2t}\begin{pmatrix} 2i\sin t \\ -2i\cos t \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da $\widetilde{z_1}$ und $\widetilde{z_2}$ linear unabhängig sind, ist die reelle allgemeine Lösung von $\dot{z} = Az$ gegeben durch

$$\widetilde{z}(t) = \gamma\widetilde{z_1}(t) + \delta\widetilde{z_2}(t) = e^{2t}\left[\gamma\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}\right]$$

oder

$$\widetilde{x}(t) = e^{2t}(\gamma\cos t + \delta\sin t) \quad \text{und} \quad \widetilde{y}(t) = e^{2t}(\gamma\sin t - \delta\cos t), \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

3.
1. 1. Möglichkeit: Substitution $u = x + y, v = x - y$.
2. 2. Möglichkeit: $A\dot{x} = x, \dot{x} = A^{-1}x$.
3. 3. Möglichkeit:

$$A\dot{\vec{x}} = \vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $\vec{x} = ve^{\alpha t}$ ist $A\alpha v = v$ und also $Av = \alpha^{-1}v$. Das char. Polynom von A beträgt

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 1$$

mit Nullstellen

$$\lambda = 1 \pm i.$$

Deswegen sind die Eigenwerte von A^{-1} gleich

$$\alpha = \frac{1}{1 \pm i} = \frac{1 \pm i}{2}$$

mit zugehörigen Eigenvektoren $(1, i)$ und $(1, -i)$. Real und Imaginärteil bilden eine Basis des Lösungsraums.

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{t/2}(C_1\cos(t/2) + C_2\sin(t/2)) \\ y(t) &= e^{t/2}(-C_1\sin(t/2) + C_2\cos(t/2)). \end{aligned}$$

4. Die Differenzialgleichung

$$y'' - (2\alpha - 4)\, y' + (8 - 4\alpha)\, y = 0 \tag{4}$$

ist eine homogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, liefert ($y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$)

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda^2 e^{\lambda x} - (2\alpha - 4)\,\lambda e^{\lambda x} + (8 - 4\alpha)\, e^{\lambda x} \\
&= \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\left[\lambda^2 - (2\alpha - 4)\,\lambda + (8 - 4\alpha)\right]. \\
\Longrightarrow p(\lambda) &:= \lambda^2 - (2\alpha - 4)\,\lambda + (8 - 4\alpha) = 0
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir berechnen die Nullstellen von $p(\lambda)$ (charakteristisches Polynom von (4))

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{2\alpha-4+\sqrt{(2\alpha-4)^2-4(8-4\alpha)}}{2} = \alpha-2+\sqrt{\alpha^2-4} \quad \text{und} \\
\lambda_2 &= \frac{2\alpha-4-\sqrt{(2\alpha-4)^2-4(8-4\alpha)}}{2} = \alpha-2-\sqrt{\alpha^2-4}.
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden folgende Fälle.
<u>$\alpha > 2$</u>:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha-2+\sqrt{\alpha^2-4} > 2-2+\sqrt{\alpha^2-4} = \sqrt{\alpha^2-4} > 0 \\
\lambda_2 &< 0, \quad \text{da} \quad \lambda_2 = \alpha-2-\sqrt{\alpha^2-4} < 0 \iff 0 < \alpha-2 < \sqrt{\alpha^2-4} \\
&\iff (\alpha-2)^2 < \left(\sqrt{\alpha^2-4}\right)^2 \iff \alpha^2-4\alpha+4 < \alpha^2-4 \\
&\iff -4\alpha < -8 \iff \alpha > 2
\end{aligned}$$

Zusammenfassend: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (insbesondere ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Somit sind alle Lösungen von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned}
&ae^{\lambda_1 x} \to \pm\infty \text{ oder } 0 \ (x \to \infty)\,, \ a \in \mathbb{R} \text{ (je nachdem, ob } a > 0, < 0 \text{ oder } = 0 \text{ ist)} \\
&be^{\lambda_2 x} \to 0 \ (x \to \infty)\,, \ b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

<u>$\alpha = 2$</u>:
Es ist $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$. Alle Lösungen sind von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned}
ae^{\lambda_1 x} &= a \ \text{(beschränkt für } x \to \infty)\,, \ a \in \mathbb{R} \\
bxe^{\lambda_2 x} &= bx \to \pm\infty \text{ oder } 0 \ (x \to \infty)\,, \ b \in \mathbb{R} \text{ (je nachdem, ob } b > 0, < 0 \text{ oder } = 0 \text{ ist).}
\end{aligned}$$

<u>$-2 < \alpha < 2$</u>:
Es gilt $\alpha^2 - 4 < 0$. Es folgt, dass $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$ (da $\alpha - 2 < 0$). Alle Lösungen sind von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned}
a\, e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}\, e^{i\mathrm{Im}(\lambda_1)x} \to 0 \ (x \to \infty)\,, \ a \in \mathbb{R} \\
b\, e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}\, e^{-i\mathrm{Im}(\lambda_1)x} \to 0 \ (x \to \infty)\,, \ b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

<u>$\alpha \leq -2$</u>:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \underbrace{\alpha-2}_{<0} - \sqrt{\underbrace{\alpha^2-4}_{\geq 0}} < 0 \\
\lambda_1 &= \alpha-2+\sqrt{\alpha^2-4} < \alpha-2+\sqrt{\alpha^2+4} < \alpha-2+\sqrt{\alpha^2 \underbrace{-4\alpha}_{>0} +4} \\
&= \alpha-2+\sqrt{(\alpha-2)^2} = \alpha-2+|\underbrace{\alpha-2}_{\leq 0}| = \alpha-2-(\alpha-2) = 0.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, d.h. wir haben exponentielles Abklingen, somit gehen alle Lösungen gegen 0 für $x \to \infty$.
Die Antworten lauten somit

a) $\alpha \geq 2$.

b) $\alpha = 2$.