Musterlösungen Serie 12

1. Frage 1

Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$ ist gleich

- ◯ 0
- √ ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ 1
- ◯ 2
- ◯ ∞

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Also ist (b) richtig.

Frage 2

Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n$ ist gleich

- ◯ 0
- ◯ 1
- √ ◯ e
- ◯ ∞

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \;/\; \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} / \frac{n!}{(n+1)^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Also ist (c) richtig.

Bitte wenden!

Frage 3

Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ als Potenzreihe um $x_0 = 0$ lautet als

- ○ $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}})x^k$
- √ ○ $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}})x^k$
- √ ○ $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k})x^{k-1}$
- ○ $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{2^k})x^k$

Durch Partialbruchzerlegung kriegen wir

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

Für $|x| < 3$ gilt

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^k = -1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{3^{k+1}}$$

und für $|x| < 2$ gilt

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^k = -1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^{k+1}}.$$

Die gesamte Entwiklung ist also im gemeinsamen Konvergenzbereich $|x| < 2$ gleich

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = -1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{3^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}})x^k,$$

die durch die Indexsubstitution $t = k+1$ mit der Reihe

$$\sum_{t=1}^{\infty}(\frac{1}{2^t} - \frac{1}{3^t})x^{t-1}$$

übereinstimmt.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 4

Die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{5+2x^2}$ um $x_0 = 0$ lautet

√ ◯ $\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{5})^k x^{2k}$

◯ $\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{5})^k x^{2k}$

◯ $\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{5}x)^k$

◯ $\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^k x^{2k}$

Dank zur geometrischen Reihe gilt für $|\frac{2}{5}x^2| < 1$

$$\frac{1}{5+2x^2} = \frac{1}{5(1-(-\frac{2}{5}x^2))} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{5})^k x^{2k}.$$

Ihr Konvergenzbereich ist $|\frac{2}{5}x^2| < 1$, also $(-\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}})$.

Frage 5

Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ als Potenzreihe um $x_0 = 1$ lautet als

◯ $\sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k$

◯ $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

√ ◯ $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$

◯ $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x-1)^{k-1}$

Dank zur geometrischen Reihe haben wir für $|x-1| < 1$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \cdots =$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k.$$

Die Reihe konvergliert für $|x-1| < 1$; ihr Konvergenzintervall ist also $(0; 2)$.

Bitte wenden!

Frage 6

Die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{1-2x^2}$ um $x_0 = 0$ lautet

- ○ $1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \dots$
- ○ $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + \dots$
- √ ○ $1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 - \dots$
- ○ $1 - x^2 - x^4 - 3x^6 - \dots$
- ○ $1 - x^2 + x^4 - 3x^6 + \dots$

Die Binomialreihe besagt $\sqrt{1-2x^2} = (1 + (-2x^2))^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \cdot (-2x^2)^k = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2x^2) + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{2} \cdot (-2x^2)^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}}{6} \cdot (-2x^2)^3 + \dots = 1 - \frac{2}{2} \cdot x^2 - \frac{4}{8} \cdot x^4 - \frac{24}{48} \cdot x^6 + \dots = 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \dots$. Also ist (c) richtig.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 7

Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ im ihren Konvergenzbereich dar?

○ $(1-x)^{-1}$

○ $(1-x)^{-2}$

○ $(1+x)^{-2}$

√ ○ $x \cdot (1-x)^{-2}$

○ $x \cdot (1-x)^{-3}$

Die Aussage (d) ist korrekt. Ein Lösungsweg ist Ausrechnen jeder der 5 Funktionen mit der Binomialreihe und Koeffizientenvergleich. Für einen anderen erinnert man sich an die Formeln

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

und

$$(1-x)^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k.$$

Deren Differenz ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-2} - (1-x)^{-1} = x \cdot (1-x)^{-2}.$$

Ein dritter Lösungsweg benutzt die Ableitung mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} x \cdot (x^k)' = x \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} x^k)' = x \cdot ((1-x)^{-1})' = x \cdot (1-x)^{-2}.$$

Bitte wenden!

Frage 8

Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}+(-1)^k\, x^{2k+2}}{(2k+1)!}$ dargestellt?

○ $\sin x + \sinh x$

√ ○ $x \sin x + \frac{1}{x} \sinh x$

○ $x \sin x + x \sinh x$

○ $x \cos x + \frac{1}{x} \cosh x$

Wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x} \sinh x$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+2}}{(2k+1)!} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x \sin x$$

ist (b) richtig.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 9

Sei f die Funktion mit

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Welches der folgende Polynome ist das zweite Taylor-Polynom $T_2(x)$ im Punkt $x_0 = 0$?

√ ◯ $1 + \frac{x^2}{2}$

◯ $1 + x + \frac{x^2}{2}$

◯ $1 + x + x^2$

◯ $1 + x^2$

Nach Definition ist mit $x_0 = 0$ das zweite Taylor-Polynom

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Es ist $f(0) = \frac{e^0}{1} = 1$, sodass alle vier Polynome möglich sind. Es ist mit Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x x}{(x+1)^2},$$

und damit $f'(0) = 0$ und es bleiben noch zwei Kandidaten. Mit Kettenregel und wieder mit Quotientenregel gilt

$$f''(x) = \frac{(e^x x)'(x+1)^2 - e^x x 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - e^x x 2(x+1)}{(x+1)^4}.$$

Setzen wir direkt 0 ein, so ist $f''(0) = 1$. Also $T_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$.

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)' &= \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x) - (-1)\cdot(1+x)}{(1-x)^2}\,\frac{1-x}{1+x} \\
&= \frac{2}{(1-x)(1+x)} \overset{(*)}{=} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{1-x} \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \left(1 - x + x^2 - \cdots\right) + \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\
&= 2\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \qquad (1)
\end{aligned}$$

wobei wir Folgendes benutzt haben:

(*) Es gilt für $A, B \in \mathbb{R}$

$$\frac{2\cdot 1 + 0\cdot x}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{(A+B)\cdot 1 + (B-A)\cdot x}{(1-x)(1+x)}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A + B = 2$, $B - A = 0$, also $A = B = 1$.

Bitte wenden!

(**) $\ln(a)$ ist definiert für alle $a > 0$. Für $x < -1$ ist $1 + x < 0$ und $1 - x > 0$, also $\frac{1+x}{1-x} < 0$. Und für $x > 1$ ist $1 + x > 0$ und $1 - x < 0$, also $\frac{1+x}{1-x} < 0$. Es folgt, dass $\ln \frac{1+x}{1-x}$ definiert ist für $|x| < 1$. Somit dürfen wir die geometrische Reihe benutzen, d.h $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ mit $|y| < 1$. Weiter gilt $|-y| < 1$ und somit folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} (-y)^n = \frac{1}{1-(-y)} = \frac{1}{1+y}$.

Durch gliedweise Integration von (1) nach x erhalten wir

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) + C = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen noch die Konstante C

$$0 = \ln \frac{1+0}{1-0} = \ln \frac{1+x}{1-x}\bigg|_{x=0} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\bigg|_{x=0} + C = C.$$

Damit ist die gesuchte Potenzreihenentwicklung gegeben durch

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1}.$$

3. Setze

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \cdots .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} y'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + 7a_7 x^6 + \cdots \\ y''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 + 42a_7 x^5 + \cdots . \end{aligned}$$

Mit $y(0) = 0$ folgt $a_0 = 0$ und mit $y'(0) = 0$ folgt $a_1 = 0$. Den Ansatz in die Differenzialgleichung eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} &2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 + 42a_7 x^5 + \cdots \overset{a_0=a_1=0}{=} \\ &\left(a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right)\left(a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right) + 1 = 1 + a_2^2 x^4 + 2a_2 a_3 x^5 + \cdots . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1 & &\Longrightarrow & a_2 &= \tfrac{1}{2} \\ 6a_3 &= 0 & &\Longrightarrow & a_3 &= 0 \\ 12a_4 &= 0 & &\Longrightarrow & a_4 &= 0 \\ 20a_5 &= 0 & &\Longrightarrow & a_5 &= 0 \\ 30a_6 &= a_2^2 & &\Longrightarrow & a_6 &= \tfrac{1}{120} \\ 42a_7 &= 2a_2 a_3 & &\Longrightarrow & a_7 &= 0. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$a_0 = a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2} \text{ und } a_6 = \frac{1}{120}.$$

4. Wir parametrisieren die Kurve durch

$$\begin{aligned} \vec{r}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(t, \varepsilon t^3\right). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Es gilt

$$\vec{r}\,(0) = (0,0) \quad \text{und} \quad \vec{r}\,(1) = (1,\varepsilon).$$

Damit ist die Parametrisierung des zwischen $(0,0)$ und $(1,\varepsilon)$ liegenden Teils der Kurve gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{r} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x\,(t)\,, y\,(t)) := \left(t, \varepsilon t^3\right). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(1, 3\varepsilon t^2\right). \tag{2}$$

Die gesuchte Bogenlänge ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L\,(\varepsilon) &= \int_0^1 \sqrt{[\dot{x}\,(t)]^2 + [\dot{y}\,(t)]^2}dt \overset{(2)}{=} \int_0^1 \sqrt{1^2 + (3\varepsilon t^2)^2}dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 9\varepsilon^2 t^4}dt \overset{(*)}{=} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 9\varepsilon^2 t^4 - \frac{1}{8}\left(9\varepsilon^2 t^4\right)^2 + \dots\right) dt \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 9\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{8}\left(9\varepsilon^2\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \dots = 1 + \frac{9}{10}\varepsilon^2 - \frac{9}{8}\varepsilon^4 + \dots \\ &= L_0 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + L_4\varepsilon^4 + \dots, \end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$ (Konvergenz für $|x| \leq 1$) benutzt haben. Daraus folgt

$$L_0 = 1,\ L_1 = 0,\ L_2 = \frac{9}{10},\ L_3 = 0 \text{ und } L_4 = -\frac{9}{8}.$$