Musterlösungen Serie 13

1. Die partielle Ableitungen des Integrals

$$I(a,b) = \int_{-1}^{1} (a + bx^2 - \cos(\pi x))^2 \, dx$$

sind

$$\partial I/\partial a = 2\int_{-1}^{1} (a + bx^2 - \cos(\pi x)) \, dx = 2(2a + \frac{2}{3}b)$$

$$\partial I/\partial b = 2\int_{-1}^{1} x^2(a + bx^2 - \cos(\pi x)) \, dx = 2(\frac{2}{3}a + \frac{2}{5}b - \mu),$$

wobei $\mu = \int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x) \, dx = -4/\pi^2$. Die kritische Punkte (a,b) erfüllen

$$a + b/3 = 0, \;\; a/3 + b/5 = -2/\pi^2.$$

Durch ausrechnen ($b = -3a$, $a/3 - 3a/5 = -2/\pi^2$, $-4a/15 = -2/\pi^2$) kriegen wir die Lösung

$$a = \frac{15}{2\pi^2}, \;\; b = -\frac{45}{2\pi^2}, \;\; f(x) = \frac{15}{2\pi^2}(1 - 3x^2).$$

Die Hesse Matrix

$$(h_{ij}) = 2\begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2/5 \end{pmatrix}$$

hat $h_{11} > 0$ und Determinante $16/15 > 0$. Also ist sie positiv definit. Da I nur ein kritischer Punkt hat, ist es eine globale Minimalstelle.

2. 1. Die Länge ist gleich

$$L(t) = \int_t^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_t^1 \sqrt{x^2+1}x^{-1} dx.$$

Für die Lösung des Integrals $\int \sqrt{x^2+1}x^{-1}dx$ setzen wir $u = \sqrt{x^2+1}, du = \frac{xdx}{u}$. Dann ist

$$x^{-1}dx = \frac{udu}{x^2} = \frac{udu}{u^2-1}$$

und also

$$\int \sqrt{x^2+1}x^{-1}dx = \int \frac{u^2}{u^2-1}du = \int (1 + \frac{1}{u^2-1})du =$$

$$= \int (1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}))du = u + \frac{1}{2}\ln\frac{|u-1|}{|u+1|} + C =$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} + C,$$

Bitte wenden!

wobei

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}\Big(\ln(\sqrt{x^2+1}-1)-\ln(\sqrt{x^2+1}+1)\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\ln(\sqrt{x^2+1}-1)+\ln(\sqrt{x^2+1}+1)\Big)-\ln(\sqrt{x^2+1}+1)=$$

$$=\ln x-\ln(\sqrt{x^2+1}+1).$$

Deswegen

$$\int\sqrt{x^2+1}x^{-1}dx=\sqrt{1+x^2}+\ln(x)-\ln(\sqrt{1+x^2}+1)+C$$

und

$$L(t)=\int_t^1\sqrt{x^2+1}x^{-1}dx=\Big[\sqrt{1+x^2}+\ln(x)-\ln(\sqrt{1+x^2}+1)+C\Big]_t^1=$$

$$=-\ln(t)+\sqrt{2}-\sqrt{1+t^2}-\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(1+\sqrt{1+t^2}).$$

2. Da[1]

$$\sqrt{1+t^2}=1+O(t)$$

und

$$\ln(1+\sqrt{1+t^2})=\ln(2)+O(t)$$

ist

$$L(t)=\ln(1/t)+\sqrt{2}-1-\ln(\sqrt{2}+1)+\ln\,2+O(t).$$

3. Für $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ sind

$$y'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$$

und

$$y''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k.$$

Nach der Anfangsbedingungen kriegen wir sofort

$$a_0=0=a_1.$$

Durch einsetzen in der Differenzialgleichung kriegen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+x^3\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k=x$$

oder auch

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+(k+1)a_{k+1}x^{k+3}=x.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$a_0=0=a_1=a_2=a_4=a_5=a_6=a_7=a_9=a_{10}$$

[1] Landau Symbol $\mathcal{O}$: $f\in\mathcal{O}(g)$ falls $0\le lim_{x\to a}|\frac{f(x)}{g(x)}|<\infty$.

Siehe nächstes Blatt!

$$a_3 = \frac{1}{6}$$

$$a_8 = -\frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6}$$

und für $n \geq 11$

$$a_n = -\frac{a_{n-5}}{n(n-1)}.$$

4. Wir benutzen den Satz im Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel IV, Seite 32. Die Kandidatenliste für die Extremalstellen von f (mit $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x$) auf der Viertelkreisscheibe B sind:

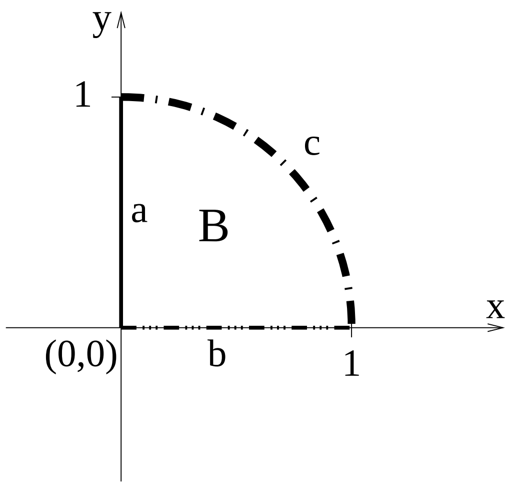
Inneres von B:

$$f_x(x,y) = 2x - y - 1 = 0 = -x + 2y = f_y(x,y) \Longrightarrow x = 2y\,,\; 2x - y - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 3y = 1 \Longrightarrow y = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ , also } \; (x,y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \in B$$

Damit ist $f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

Rand von B:



Auf dem Geradenstück a (ohne Eckpunkte, siehe Skizze) gilt:
$x = 0$ und $0 < y < 1$, damit ist $f(0,y) = y^2$, es folgt, dass $f_y(0,y) = 2y = 0$ impliziert $y = 0$ ($(0,0)$ ist kein Element von a). Damit gibt es keine Extremalstellen auf a.
Auf dem Geradenstück b (ohne Eckpunkte, siehe Skizze) gilt:
$y = 0$ und $0 < x < 1$, damit ist $f(x,0) = x^2 - x$, es folgt, dass $f_x(x,0) = 2x - 1 = 0$ impliziert $x = \frac{1}{2}$. Der Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ liegt auf b. Es ist $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.
Auf dem Kurvenstück c (ohne Eckpunkte, siehe Skizze) gilt:
$(x,y) = (\cos t, \sin t)$ und $0 < t < \frac{\pi}{2}$, damit ist

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \cos t \sin t + \sin^2 t - \cos t = 1 - \frac{1}{2}\sin 2t - \cos t,$$

wobei wir $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ (Additionstheorem für den Sinus) und $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ benutzt haben.

Bitte wenden!

Mit dem Additionstheorem für den Cosinus ($\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$) und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\cos t, \sin t) &= -\cos 2t + \sin t = -(\cos^2 t - \sin^2 t) + \sin t \\ &= -\left[\left(1 - \sin^2 t\right) - \sin^2 t\right] + \sin t = 2\sin^2 t + \sin t - 1 \end{aligned}$$

Aus $\frac{d}{dt} f(\cos t, \sin t) = 0$ folgt $\sin t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$, also $\sin t = \frac{1}{2}$ oder $\sin t = -1$. Wegen $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ist $t = \frac{\pi}{6}$. Damit ist $f\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4} > -\frac{1}{3}$.

Ecken von B:
$f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 0$ und $f(0,1) = 1$.

Insgesamt erhalten wir: Maximum von f ist $f(0,1) = 1$ und Minimum von f ist $f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

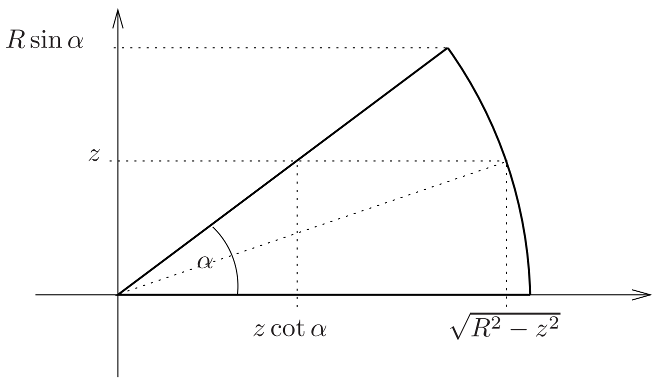
5. <u>Methode 1:</u> Wir wählen Zylinderkoordinaten (ϱ, ϕ, z), d.h

$$x = \varrho\cos\phi, \quad y = \varrho\sin\phi \quad \text{und} \quad z = z,$$

wobei $0 \le \varrho < \infty$, $0 \le \phi < 2\pi$ und $z \in \mathbb{R}$. Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse

$$\Theta = \delta \iiint_B \varrho^2 \, \mathrm{d}m,$$

wobei δ die Dichte ist, ergibt sich mit $\mathrm{d}m = \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z$.



Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \delta \int_0^{\beta} \underbrace{\int_0^{R\sin\alpha} \int_{z\cot\alpha}^{\sqrt{R^2-z^2}} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \,\mathrm{d}z}_{\text{unabhängig von } \phi} \,\mathrm{d}\phi = \delta\beta \int_0^{R\sin\alpha} \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_{z\cot\alpha}^{\sqrt{R^2-z^2}} \mathrm{d}z \\
&= \frac{\delta\beta}{4} \int_0^{R\sin\alpha} \left(R^4 - 2R^2z^2 + z^4 - z^4\cot^4\alpha\right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{\delta\beta}{4} \left[R^4 z - \frac{2}{3}\,R^2z^3 + \frac{1}{5}\,z^5 - \frac{1}{5}\,z^5\cot^4\alpha\right]_0^{R\sin\alpha} \\
&= \frac{\delta\beta}{4}\,R^5\Big(\sin\alpha - \frac{2}{3}\,\sin^3\alpha + \frac{1}{5}\,\sin^5\alpha - \frac{1}{5}\,\sin\alpha\underbrace{\cos^4\alpha}_{=(1-\sin^2\alpha)^2}\Big) \\
&= \frac{\delta\beta}{4}\,R^5\sin\alpha\Big(1 - \frac{2}{3}\,\sin^2\alpha + \frac{1}{5}\,\sin^4\alpha - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,\sin^2\alpha - \frac{1}{5}\,\sin^4\alpha\Big) \\
&= \frac{\delta\beta}{15}\,R^5(3\sin\alpha - \sin^3\alpha)
\end{aligned}
$$

<u>Methode 2:</u> Wir wählen Kugelkoordinaten $(\varrho, \phi, \vartheta)$, d.h

$$x = r\sin\vartheta\cos\phi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\phi \quad \text{und} \quad z = r\cos\vartheta,$$

wobei $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$ und $0 \le r < \infty$. Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse

$$\Theta = \delta \iiint_B \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}m$$

wobei δ die Dichte ist, ergibt sich mit $\mathrm{d}m = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\vartheta$.

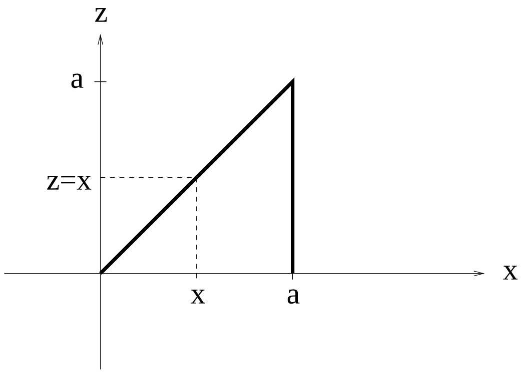
$$
\begin{aligned}
\Theta &= \delta \int_0^{\beta} \underbrace{\int_0^{R} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} r^4\sin^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r}_{\text{unabhängig von } \phi}\,\mathrm{d}\phi = \delta\beta \int_0^{R} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} r^4(\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\
&= \delta\beta \underbrace{\int_0^{R} r^4\,\mathrm{d}r}_{=\frac{R^5}{5}} \cdot \left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\delta\beta}{5}R^5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{3}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\delta\beta}{5}R^5\left[\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha - \frac{\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)^3}{3}\right] \\
&= \frac{\delta\beta}{15}\,R^5(3\sin\alpha - \sin^3\alpha)
\end{aligned}
$$

In (*) haben wir das Additionstheorem für den Cosinus, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, benutzt.

Bemerkung: Mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = 2\pi$ erhält man $2\,\Theta = \delta\frac{8\pi}{15}\,R^5 = \delta\frac{2}{5}\Big(\frac{4\pi}{3}\,R^3\Big)R^2$, das bekannte Trägheitsmoment einer Vollkugel bezüglich eines ihrer Durchmesser.

Bitte wenden!

6. Wir betrachten den Fluss $\Phi(a)$ des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch die Oberfläche von W_a von innen nach aussen. Sei $f : [0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Gesucht ist eine Bedingung an f, so dass $\Phi(a)$ unabhänig von a ist. Wir betrachten den Schnitt des Körpers W_a bei festem y.



Der Satz von Gauss liefert

$$\begin{aligned}
\Phi(a) &= \iiint_{W_a} \mathbf{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^a \int_0^x \mathbf{div}\vec{v}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^a \int_0^x \left(f'(x) + z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^a \left[f'(x)\,z + \frac{z^2}{2}\right]_0^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^a \left(f'(x)\,x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \left(f'(x)\,x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(a) \text{ unabhängig von } a \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 = \Phi'(a) \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^a \left(f'(x)\,x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = f'(a)\,a + \frac{a^2}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad f'(a) = -\frac{a}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad f(a) = C - \frac{a^2}{4} \quad \text{mit } C \text{ eine Konstante.} \qquad (1)
\end{aligned}$$

(1) ist also die gesuchte Bedingung an f.

7. Wegen $e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $-t^2 \in \mathbb{R}$ (da $t \in [0, x], x > 0$) gilt $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-t^2\right)^n}{n!}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-t^2\right)^n}{n!}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \cdots\right)}{t^2} \\
&= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2(n-1)}}{n!}.
\end{aligned}$$

Gliedweise Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^x t^{2(n-1)} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)n!} x^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

8. Sei $P = (X, Y, Z)$ ein Punkt auf der Einheitskugel. Es gilt also $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Dann wird der Weg von O nach P wie folgt parametrisiert

$$\vec{r}(t) = t \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Die längs dieses Weges von $\vec{v}$ verrichtete Arbeit $A(P)$ ist dann

$$A(P) = \int_0^1 \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big) \boldsymbol{\cdot} \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 Y^2 Z \\ t^3 XYZ \\ 2t^3 XY^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\cdot} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dt = XY^2 Z \int_0^1 4t^3\, dt = XY^2 Z.$$

Es ist also das Maximum von XY^2Z unter der Nebenbedingung $X^2+Y^2+Z^2 = 1$ gesucht. Man setzt $Y^2 = 1 - X^2 - Z^2$ ein und muss nun das Maximum der Funktion $A(P) = XZ(1 - X^2 - Z^2)$ in der Kreisscheibe $X^2 + Z^2 \le 1$ suchen. Man beachte, dass auf dem Rand der Kreisscheibe $A(P) = 0$ ist. Für extremale Punkte im Innern verschwindet der Gradient. Man hat also

$$\begin{pmatrix} A_X \\ A_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z(1 - Z^2 - 3X^2) \\ X(1 - X^2 - 3Z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungen dieses Gleichungssystem, für die $X = 0$ oder $Z = 0$ ist, liefern $A = 0$. Für die andern Lösungen gilt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 - Z^2 - 3X^2 &= 0 \\ 1 - X^2 - 3Z^2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{mit der Lösung} \quad X^2 = Z^2 = \frac{1}{4}\,.$$

In diesem Fall ist dann $Y^2 = 1 - X^2 - Z^2 = \frac{1}{2}$, und man erhält die vier Punkte

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{mit maximaler Arbeit} \quad A = \frac{1}{8}\,.$$

9. Setze $u(x) = x + 2y(x)$, d. h. $y(x) = \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{2}x$. Dann ergibt sich

$$y'(x) = \frac{1}{2}u' - \frac{1}{2}\,,$$

und damit wird die ursprüngliche Gleichung zu

$$\frac{1}{2}u' - \frac{1}{2} = \frac{2 - \sin(u)}{2\sin(u)} = \frac{1}{\sin u} - \frac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad u' = \frac{2}{\sin u}\,.$$

Diese Differentialgleichung ist separierbar:

$$\int \sin u\, du = \int 2\, dx.$$

Wir finden

$$\cos u = -2x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Die Auflösung nach u liefert $u(x) = \arccos(-2x + C)$, und wegen $y(x) = \frac{1}{2}\big(u(x) - x\big)$ erhält man schliesslich

$$y = y(x) = \frac{1}{2}\big(\arccos(-2x + C) - x\big), \quad C \in \mathbb{R}.$$