Musterlösungen Serie 3

1. **Frage 1**

   Berechnen Sie
   $$\int\int_D xe^{x+y}\,dF,$$
   wobei $D = [0,1] \times [0,1]$.

   √ ◯ $e-1$

   ◯ 1

   ◯ $e+1$

   $$\int\int_D xe^{x+y}\,dF = \int_0^1 \int_0^1 xe^{x+y}\,dydx = \int_0^1 x[e^{x+y}]_{y=0}^{y=1}\,dx = \int_0^1 x(e^{x+1}-e^x)\,dx.$$

   Mit einer partiellen Integration erhalten wir
   $$\int_0^1 x(e^{x+1}-e^x)\,dx = [x(e^{x+1}-e^x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (e^{x+1}-e^x)\,dx =$$
   $$= e^2 - e - [(e^{x+1}-e^x)]_{x=0}^{x=1} = e^2 - e - (e^2 - e - e + 1) = e - 1.$$

Frage 2

Berechnen Sie
$$\int\int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dF,$$
wobei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

○ $\pi(1+\frac{1}{e})$

○ $\pi(2-\frac{1}{e})$

√ ○ $\pi(1-\frac{1}{e})$

Wir rechnen in Polarkoordinaten:
$$\int\int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dF = \int_0^1\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\,d\phi\,dr = 2\pi\int_0^1 e^{-r^2}\cdot r\ dr = -\pi\int_0^1 e^{-r^2}\cdot(-2r)\ dr =$$
$$= -\pi[e^{-r^2}]_0^1 = \pi(1-\frac{1}{e}).$$

Frage 3

Berechnen Sie
$$\int\int_D x^2y^2\,dF,$$
wobei D das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ geschlossenes Gebiet bezeichnet.

√ ○ $\frac{4}{27}$

○ $\frac{5}{27}$

○ $\frac{1}{9}$

$$\int\int_D x^2y^2\,dF = \int_{-1}^1\int_{x^2}^1 x^2y^2\,dydx = \int_{-1}^1 x^2[\frac{y^3}{3}]_{x^2}^1\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^1 x^2(1-x^6)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^1(x^2-x^8)\,dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}-\frac{x^9}{9}]_{-1}^1 = \frac{4}{27}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 4

Für welches B ist

$$\int\int_B (2 - x^2 - 2y^2)\, dF$$

am grössten?

√ ○ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$

√ ○ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0\}$

√ ○ B ist eine gefüllte Ellipse um $(0,0)$ mit Hauptachsen $\sqrt{2}$ und 1.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Wir schreiben

$$D = \underbrace{\{(x,y) \in D \mid 2 - x^2 - 2y^2 < 0\}}_{=:D_1} \cup \underbrace{\{(x,y) \in D \mid 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0\}}_{=:D_2} = D_1 \cup D_2.$$

Daher

$$\begin{aligned}\int_D (2 - x^2 - 2y^2) dF &= \int_{D_1 \cup D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dF = \\ &\overset{(*)}{=} \int_{D_1} (2 - x^2 - 2y^2) dF + \int_{D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dF \\ &\overset{(**)}{\leq} \int_{D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dF\end{aligned}$$

wobei $(*)$ ist gültig, da in unserem Fall $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ist, und die Ungleichung $(**)$ folgt aus der Monotonie des Integrals und nach Definition von D_1. Setzen wir also

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0\}.$$

Da $D_1 \subseteq B$ und nach der Monotonie des Integrals folgt, dass

$$\int_D (2 - x^2 - 2y^2) dF \leq \int_{D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dF \leq \int_B (2 - x^2 - 2y^2) dF$$

für beliebige Gebiete D gültig ist, und also, dass B die gewünschte Bedingung erfüllt.
Bemerkung: Das Gebiet

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$$

ist eine gefüllte Ellipse um $(0,0)$ mit Hauptachsen $\sqrt{2}$ und 1.

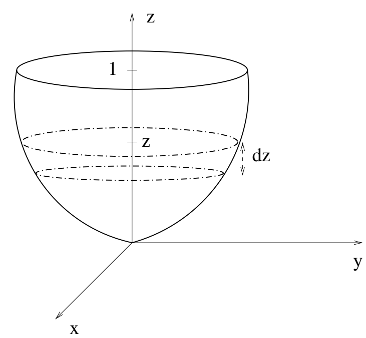
Bitte wenden!

Frage 5

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, welcher von unten durch das Paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ und von oben durch die Ebene $z = 1$ begrenzt wird.

- ◯ $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$
- ◯ $\frac{\pi}{4}$
- √ ◯ $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

Methode 1:
Wir zerlegen den Körper in Scheiben parallel zu der xy–Ebene:



Grundfläche der Scheibe bei z ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{\frac{z}{2}}$ und $\sqrt{z}$, da folgendes gilt

$$z = 2x^2 + y^2 \Longrightarrow 1 = \frac{1}{\left(\sqrt{z/2}\right)^2}x^2 + \frac{1}{(\sqrt{z})^2}y^2 \quad (z \neq 0).$$

Damit ist der Flächeninhalt der Grundfläche der Scheibe: $\pi \cdot \sqrt{\frac{z}{2}} \cdot \sqrt{z} = \pi \frac{z}{\sqrt{2}}$ (da der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b gleich $\pi \cdot a \cdot b$ ist). Die Dicke der Scheibe ist $\mathrm{d}z$. Es folgt, dass das Volumen der Scheibe bei z gegeben ist durch $\mathrm{d}V = \pi \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{d}z$. Also ist das Volumen des Körpers gegeben durch

$$V = \int \mathrm{d}V = \int_0^1 \pi \frac{z}{\sqrt{2}} \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Methode 2:
Zu berechnen ist

$$\text{das Volumen des Körpers} = V = \underbrace{\iiint}_{\text{geeignete Grenzen}} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Wir führen folgende Koordinaten ein

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \quad \text{und} \quad z = z,$$

wobei $0 \leq \phi < 2\pi$ und $0 \leq z \leq 1$. Wir berechnen zudem die Grenzen für die r–Integration:

$$z = 2x^2 + y^2 = 2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2 + (r\sin\phi)^2 = r^2 \Longrightarrow 0 \leq r \leq \sqrt{z}.$$

Wir berechnen das Volumenelement $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\det(J)|\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$:

$$\det(J) = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\phi & x_z \\ y_r & y_\phi & y_z \\ z_r & z_\phi & z_z \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}} & -\frac{r\sin\phi}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Also ist $\mathrm{d}V = \frac{r}{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$. Es folgt

$$\begin{aligned} V &= \underbrace{\iiint}_{\text{geeignete Grenzen}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \frac{r}{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \cdot \int_0^1 \left(\frac{r^2}{2\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\sqrt{z}} \mathrm{d}z = 2\pi \cdot \frac{z^2}{4\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Frage 6

Sei T ein Tetraeder mit Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.
Berechnen Sie das Integral

$$\int\int\int_T f(x,y,z)dV,$$

mit $f(x,y,z) = x+y$.

- ○ $\frac{4}{3}$
- √ ○ $\frac{3}{4}$
- ○ $\frac{1}{2}$

Es gilt:

$$\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y}(x+y)dzdydx = \int_0^1\int_0^{2-2x}[(x+y)z]_{z=0}^{z=3-3x-\frac{3}{2}y}dydx =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2-2x}(x+y)(3-3x-\frac{3}{2}y)dydx = \int_0^1\int_0^{2-2x}(3x-3x^2-\frac{9}{2}xy+3y-\frac{3}{2}y^2)dydx =$$

$$= \int_0^1[(3x-3x^2)y+(3-\frac{9}{2}x)\frac{y^2}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3}]_{y=0}^{y=2-2x}dx =$$

$$= \int_0^1[(3x-3x^2)(2-2x)+(3-\frac{9}{2}x)\frac{(2-2x)^2}{2}-\frac{(2-2x)^3}{3}]dx =$$

$$= \int_0^1(6-15x+12x^2-3x^3-4(1-x)^3)dx = [6x-15\frac{x^2}{2}+4x^3-3\frac{x^4}{4}+(1-x)^4]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

2. i)

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\varrho,\phi,t) = \lambda c f(\varrho,\phi)(A\cos(\lambda ct)-B\sin(\lambda ct))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\varrho,\phi,t) = -\lambda^2c^2f(\varrho,\phi)(A\sin(\lambda ct)+B\cos(\lambda ct))$$

$$\Delta u(\varrho,\phi,t) = \Delta f(\varrho,\phi)(A\sin(\lambda ct)+B\cos(\lambda ct)) = (A\sin(\lambda ct)+B\cos(\lambda ct))\underbrace{\Delta f(\varrho,\phi)}_{-\lambda^2 f(\varrho,\phi)} =$$

$$= -\lambda^2 f(\varrho,\phi)(A\sin(\lambda ct)+B\cos(\lambda ct))$$

Wir haben gezeigt, dass diese $u(\varrho,\phi,t)$ eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2\Delta u$ ist.

ii)

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}f(\varrho,\phi) = h(\varrho)^{'}(C\sin(n\phi)+D\cos(n\phi))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}f(\varrho,\phi) = h(\varrho)^{''}(C\sin(n\phi)+D\cos(n\phi))$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\frac{\partial}{\partial \phi} f(\varrho, \phi) = h(\varrho)(nC\cos(n\phi) - nD\sin(n\phi))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f(\varrho, \phi) = -n^2 h(\varrho)(C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi))$$

Es folgt

$$\Delta f(\varrho, \phi) = (\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}) f(\varrho, \phi) =$$

$$= h(\varrho)^{''}(C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi)) + \frac{1}{\varrho} h(\varrho)^{'}(C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi)) + \frac{1}{\varrho^2}(-n^2)h(\varrho)(C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi)) =$$

$$= (C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi)) \cdot \Big(h(\varrho)^{''} + \frac{1}{\varrho} h(\varrho)^{'} + \frac{1}{\varrho^2}(-n^2 h(\varrho))\Big) =$$

$$= (C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi)) \cdot \Big(\underbrace{h(\varrho)^{''} + \frac{1}{\varrho} h(\varrho)^{'} + \frac{1}{\varrho^2}(-n^2 h(\varrho)) + (\lambda^2 h(\varrho)}_{=0} - \lambda^2 h(\varrho))\Big) =$$

$$= -\lambda^2 h(\varrho)(C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi)) = -\lambda^2 f(\varrho, \phi)$$

iii)

$$J_n^{'}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}x)^{n+2m-1}(n+2m)\frac{1}{2}$$

$$J_n^{''}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}x)^{n+2m-2}(n+2m)(n+2m-1)(\frac{1}{2})^2$$

Es folgt:

$$J_n^{''}(x) + \frac{1}{x} J_n^{'}(x) + (1 - \frac{n^2}{x^2}) J_n(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}x)^{n+2m-2}(n+2m)(n+2m-1)(\frac{1}{2})^2 +$$

$$+ \frac{1}{x}(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}x)^{n+2m-1}(n+2m)\frac{1}{2}) +$$

$$+ (1 - \frac{n^2}{x^2})(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\frac{1}{2}x)^{n+2m}}{m!(n+m)!} =$$

Bitte wenden!

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2})^{n+2m} \Big((n+2m)(n+2m-1) x^{n+2m-2} + (n+2m) x^{n+2m-2} + (1 - \frac{n^2}{x^2}) x^{n+2m} \Big) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2})^{n+2m} \Big(4m(n+m) x^{n+2m-2} + x^{n+2m} \Big) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m-1)!(n+m-1)!} (\frac{1}{2})^{n+2m-2} x^{n+2m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2})^{n+2m} x^{n+2m} =$$

Wir substituieren $m^{'} = m - 1$: =

$$\sum_{m^{'}=0}^{\infty} (-1)^{m^{'}+1} \frac{1}{(m^{'})!(n+m^{'})!} (\frac{1}{2})^{n+2m^{'}} x^{n+2m^{'}} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2})^{n+2m} x^{n+2m} \Big) = 0$$

iv) Analog wie Teil (iii):

$$h^{'}(\varrho) = J_n^{'}(\lambda\varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}\varrho\lambda)^{n+2m-1} (n+2m) \frac{1}{2}\lambda$$

$$h^{''}(\varrho) = J_n^{''}(\lambda\varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}\varrho\lambda)^{n+2m-2} (n+2m)(n+2m-1) (\frac{1}{2}\lambda)^2$$

Es folgt:

$$h(\varrho)^{''} + \frac{1}{\varrho} h(\varrho)^{'} + (\lambda^2 - \frac{n^2}{\varrho^2}) h(\varrho) = \cdots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}\lambda)^{n+2m} \Big(4m(n+m) \varrho^{n+2m-2} + \varrho^{n+2m} \Big) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m-1)!(n+m-1)!} (\frac{1}{2}\lambda)^{n+2m-2} \varrho^{n+2m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}\lambda)^{n+2m} \varrho^{n+2m} =$$

Wir substituieren $m^{'} = m - 1$:

$$= \sum_{m^{'}=0}^{\infty} (-1)^{m^{'}+1} \frac{1}{(m^{'})!(n+m^{'})!} (\frac{1}{2}\lambda)^{n+2m^{'}} \varrho^{n+2m^{'}} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{1}{2}\lambda)^{n+2m} \varrho^{n+2m} \Big) = 0$$

3.

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\ dy = \int_{-\infty}^{\infty}\ dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\ dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dF.$$

Mit Polarkoordinaten (r, ϕ) ist $-(x^2 + y^2) = -r^2$ und $dF = dxdy = rdrd\phi$. Also

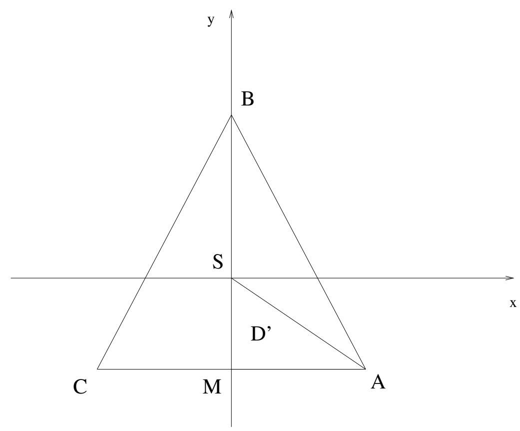
$$J^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2}\ dF = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} d\phi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\lim_{r\to\infty} e^{-r^2} - 1) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi = \pi$$

und daher

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Wir wählen ein Koordinatensystem so, dass $S = (0, 0)$ und eine der Ecke des Dreiecks auf der positiven y-Achse liegt.



Aus Symmetriegründen kriegen wir

$$J_0 = 6 \iint_{D'} (x^2 + y^2)\, dxdy,$$

wobei D' das Dreieck ASM bezeichnet. Es gilt

$$A = (\frac{a}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{6} a),$$

und die durch SA bestimmte Gerade hat die Gleichung

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x.$$

Wir erhalten

$$J_0 = 6 \int_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} dy \int_0^{-\sqrt{3}y} (x^2+y^2)\, dx = 6 \int_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_0^{-\sqrt{3}y} dy = 6 \int_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} \left[-\sqrt{3}y^3 - \sqrt{3}y^3\right] dy =$$

$$= -2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \int_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} y^3\, dy = -2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \left[\frac{y^4}{4}\right]_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 16} a^4.$$