Musterlösungen Serie 4

1. Frage 1

$(3+2i)\cdot(1-2i) = \ldots$

$\surd$ ◯ $7-4i$

◯ $7+8i$

◯ $-1-4i$

◯ $3-8i$

Es gilt

$$\begin{aligned}(3+2i)\cdot(1-2i) &= 3\cdot 1 + 2i\cdot 1 - 3\cdot 2i - 2i\cdot 2i \\ &= 3+2i-6i+4 \\ &= 7-4i.\end{aligned}$$

Frage 2

Sei $z = 2-3i$. Welches ist die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$?

◯ $2-3i$.

$\surd$ ◯ $2+3i$.

◯ $-2-3i$.

◯ $3-2i$.

◯ $3i$.

Ganz allgemein ist für eine komplexe Zahl $z = a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ das komplex Konjugierte $\overline{z} = a - ib$.

Frage 3

Für die komplexe Zahl $z = \frac{3+2i}{4-i}$ gilt

√ ◯ $z = \frac{10+11i}{17}$.

◯ $z = \frac{17}{8i+2}$.

◯ $z = \frac{14+5i}{17}$.

◯ $z = \frac{5+14i}{17}$.

Durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners erhält man

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3+2i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \\ &= \frac{(3+2i)(4+i)}{4^2+1^2} \\ &= \frac{10+11i}{17}. \end{aligned}$$

Frage 4

Für die komplexe Zahl $z = (3+2i)^3$ gilt

◯ $z = 27 + 8i$.

√ ◯ $z = -9 + 46i$.

◯ $z = -9 + 10i$.

◯ $z = -9 - 46i$.

Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt die binomische Formel $(w+z)^3 = w^3 + 3w^2z + 3wz^2 + z^3$. In unserem Fall liefert das

$$\begin{aligned} z &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot (2i) + 3 \cdot 3 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 \\ &= -9 + 46i. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 5

Die Zahl $z = 3e^{\frac{5}{6}\pi i}$ ist gleich

○ $z = 3 + \frac{5}{6}i$

√ ○ $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

○ $z = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

○ $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

Es ist $|z| = 3$ und $\varphi = arg(z) = \frac{5}{6}\pi$. Also

$$z = |z|\cos(\varphi) + i|z|\sin(\varphi) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}.$$

Frage 6

Für die komplexe Zahl $z = (-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2})^6$ gilt

○ $z = 3^6 i$

√ ○ $z = -3^6$

○ $z = -3$

○ $z = 3i$

Da $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} = 3e^{\frac{5}{6}\pi i}$ gilt nach De Moivre

$$(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2})^6 = (3e^{\frac{5}{6}\pi i})^6 = 3^6 e^{5\pi i} = -3^6.$$

Bitte wenden!

Frage 7

Es ist $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \ldots$

√ ◯ $\pi/6$

√ ◯ $-\pi/6$

◯ $-5\pi/6$

◯ $-2\pi/3$

◯ $\pi/3$

Es gilt $\phi = \arg\left(\sqrt{3}/2 - i/2\right) \Leftrightarrow \cos\phi + i\sin\phi = \sqrt{3}/2 - i/2 \Leftrightarrow \left(\cos\phi = \sqrt{3}/2 \text{ und } \sin\phi = -1/2\right)$. Die Vorzeichen implizieren $0 > \phi > -\pi/2$; mit der Erinnerung an $\sin\pi/6 = 1/2$ folgt daher $\phi = -\pi/6$. Somit ist (b) richtig.

Frage 8

Es ist $\arg\left(\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4\right) = \cdots$

◯ $\frac{\pi}{3}$

√ ◯ $\frac{2}{3}\pi$

◯ $\frac{5}{6}\pi$

◯ π

◯ $\frac{3}{2}\pi$

Für jedes $\phi \in \mathbb{R}$ gilt $\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$. Wegen $(e^{i\phi})^k = e^{ik\phi}$ für jedes $k \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned}\arg\left(\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4\right) &= \arg\left(e^{i\frac{4\pi}{6}}\right)\\ &= \arg\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\\ &= \arg\left(\cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \frac{2\pi}{3},\end{aligned}$$

denn $\frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi[$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 9

Sei $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}(5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

- ◯ $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ◯ $\sqrt{3}$
- ◯ $\frac{1}{5\sqrt{3}}$
- ◯ $5\sqrt{3}$
- √ ◯ Keines von diesen.

Es gilt

$$z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}(5\sqrt{3} + bi) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(5\sqrt{3} + bi) = 15 + b\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}i - b = (15 - b) + i \cdot (b\sqrt{3} + 5\sqrt{3}).$$

Die Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschwindet, und dies ist für $b = -5$ der Fall, welches nicht auftaucht.

Bitte wenden!

Frage 10

Klicken Sie die richtigen Aussagen an.

√ ◯ Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$.

Die Aussage ist wahr, da $z \cdot \bar{z} = -|z|^2 \in \mathbb{R}$.

√ ◯ Sei $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ die n-Wurzeln von z, für $n \geq 2$. Dann ist

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0.$$

Die Aussage ist wahr. Es gilt:

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\phi+2\pi k}{n}},$$

für $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Also

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\phi}{n}} \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + e^{i\frac{6\pi}{n}} + \cdots + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\phi}{n}} \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2 + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^3 + \cdots + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^{n-1}\right) \overset{*}{=} \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\phi}{n}} \frac{1 - (e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\phi}{n}} \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0,$$

wobei für (*) haben wir die Formel (Summe der Glieder einer geometrischen Folge)

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

benützt.

√ ◯ Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 2\}$ ist ein Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 2.

Die Aussage ist wahr. Die Zahl $|z - 1|$ ist als Abstand von z zu 1 zu interpretieren.

√ ◯ $(1 + i)^{2000} = 2^{1000}$.

Nach De Moivre gilt

$$(1+i))^{2000} = (\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})))^{2000} = \sqrt{2}^{2000}(\cos(\frac{2000\pi}{4})+i\sin(\frac{2000\pi}{4})) = 2^{1000}(\cos(0)+i\sin(0)) = 2^{1000}.$$

◯ $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$

Es gilt:

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = Re(e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}) = Re(e^{\varphi_1 i}e^{\varphi_2 i}) = Re((\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 11

Welche Aussage ist **richtig**? Die Abbildung $z \to iz$ ist

- ◯ eine Spielgelung an der reellen Achse.
- ◯ eine Spiegelung an der imaginären Achse.
- ◯ eine Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.
- $\surd$ ◯ eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$.
- ◯ eine Drehung um π.

Frage 12

Der Realteil der komplexen Zahl $\exp(i)$ beträgt

- ◯ 1.
- ◯ 0.
- $\surd$ ◯ $\cos(1)$.
- ◯ $\sin(1)$.
- ◯ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 13

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ $\mathrm{Re}(\exp(z)) = \exp(\mathrm{Re}\, z)$.

Nein, betrachten Sie zum Beispiel $z = \frac{\pi i}{2}$.

○ $\mathrm{Im}(\exp(z)) = \exp(\mathrm{Im}\, z)$.

Nein, betrachten Sie zum Beispiel $z = -\pi i$.

√ ○ $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\, z)$.

Richtig.

○ $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Im}\, z)$.

Nein, betrachten Sie zum Beispiel $z = i$.

○ $|\exp(z)| = \exp(|z|)$.

Nein, betrachten Sie zum Beispiel $z = -1$ oder $z = ti$ mit t reell.

Frage 14

Die komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 = i$ sind

○ $-i$ und -1.

√ ○ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

○ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

○ i und $-i$.

Da beim Quadrieren von komplexen Zahlen Winkel verdoppelt und Beträge quadriert werden, sieht man, dass die beiden komplexen Zahlen mit Betrag 1 auf der ersten Winkelhalbierenden in der Gaußschen Zahlenebende die Lösungen der Gleichung sind. Alternativ kann man auch das Gleichungssystem $\left|\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 0 \\ 2ab &= 1 \\ a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned}\right|$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ lösen.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 15

Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 + z = 0$.

√ ○ $0,\ -1,\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

○ $0,\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{-\frac{2\pi i}{3}},\ -1$

○ $0,\ i,\ -i,\ -1$

○ $e^{i\frac{\pi}{4}},\ e^{-i\frac{\pi}{4}},\ 0,\ -1$

○ $0,\ e^{i\frac{\pi}{3}},\ 1$

Es gilt

$$z^4 + z = z\left(z^3 + 1\right) = 0$$

somit ist $z_1 := 0$ eine Lösung (die anderen Lösungen erhalten wir aus $z^3 + 1 = 0$).
Sei nun $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $r \geq 0$. Es gilt

$$z^3 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(re^{i\varphi}\right)^3 = -1 = e^{i\pi} \Longleftrightarrow r^3 e^{i\cdot 3\varphi} = r^3 e^{i(3\varphi + 2k\pi)} = e^{i\pi},\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Durch Vergleich beider Seiten folgt $r^3 = 1$, also $r = 1$ und

$$3\varphi + 2k\pi = \pi \Longleftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}(1 - 2k)$$

Da $\varphi \in [0, 2\pi)$, gilt

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \tfrac{\pi}{3}\ \ (k = 0)\\ \varphi_3 &= \pi\ \ (k = -1)\\ \varphi_4 &= \tfrac{5\pi}{3}\ \ (k = -2)\end{aligned}$$

Wir erhalten somit die restlichen Lösungen der Gleichung $z^4 + z = 0$:

$$\begin{aligned}z_2 &= 1 \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\ z_3 &= 1 \cdot e^{i\varphi_3} = e^{i\pi} = -1\\ z_4 &= 1 \cdot e^{i\varphi_4} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

2. i) Die v-Linien sind gerade die Tangenten an die Kurve K, die u-Linie, die zu $v = 0$ gehört, ist die Kurve K.

ii) Der normale Einheitsvektor zur Fläche S in einem Punkt $P = \vec{r}(u, v)$ wird durch

$$\vec{n}(u, v) = \pm \frac{\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)}{|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|}$$

gegeben, wobei

$$\vec{r}_u(u, v) = \dot{\vec{s}}(u) + v\ddot{\vec{s}}(u)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = \dot{\vec{s}}(u).$$

Bitte wenden!

Damit erhalten wir

$$\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) = (\dot{\vec{s}}(u) + v\ddot{\vec{s}}(u)) \times \dot{\vec{s}}(u) = v\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)$$

und

$$\vec{n}(u,v) = \pm\frac{\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)}{|\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)|},$$

also unabhängig vom Parameter v und deswegen konstant auf jeder v-Linie (mit u=Konstant). Da die v-Linien die Tangenten an die ursprünglich gegebenen Kurve K sind, folgt daraus, dass die Tangentialebene an die Fläche S im Punkt P diese längs der durch P gehende Tangente an die Kurve K berührt.

iii) Es gilt:

$$\dot{\vec{s}}(u) = (-\sin u, \cos u, h)$$

$$\ddot{\vec{s}}(u) = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

$$\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u) = (-h\sin u, h\cos u, -1)$$

$$\vec{n}(u,v) = \pm\frac{\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)}{|\ddot{\vec{s}}(u) \times \dot{\vec{s}}(u)|} = \pm\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}(-h\sin u, h\cos u, -1).$$

Es gilt:

$$\cos\omega(u,v) = \vec{n}(u,v)\cdot(0,0,1) = \pm\frac{1}{\sqrt{h^2+1}} = \text{Konst.}$$

Wir bemerken, dass ω unabhängig von u und v ist, d.h. ω auf der ganzen Fläche konstant ist. Die Tangentenfläche an die Schraublinie hat also gegenüber der (x,y)-Ebene überall dieselbe Neigung. Diese Tatsache hat wichtige Anwendungen in der Materialwissenschaft. (Vgl. U. Stammbach, Analysis I und II, Kap. $VI.3$.)

3. Für die Beschreibung des Flächenstücks S wählen wir Polarkoordinaten in der (x,y)-Ebene als Parametern. Die Fläche S wird dann durch die Parameterdarstellung

$$(\varrho,\varphi) \mapsto \vec{r}(\varrho,\varphi) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \sqrt{1-\varrho^2})$$

beschrieben. Für eine gute Illustration schauen Sie in U. Stammbach, Analysis I und II, Kap. $VI.3$. an. Der Definitionsbereich A ist durch $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $0 \le \varrho \le \cos(\frac{\varphi}{4})$. Dann ist

$$\vec{r}_\varrho(\varrho,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -\frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}})$$

$$\vec{r}_\varphi(\varrho,\varphi) = (-\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi, 0)$$

$$\vec{r}_\varrho(\varrho,\varphi) \times \vec{r}_\varphi(\varrho,\varphi) = (\frac{\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}}\cos\varphi, \frac{\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}}\sin\varphi, \varrho)$$

$$|\vec{r}_\varrho(\varrho,\varphi) \times \vec{r}_\varphi(\varrho,\varphi)| = (\frac{\varrho^4}{1-\varrho^2}\cos^2\varphi + \frac{\varrho^4}{1-\varrho^2}\sin^2\varphi + \varrho^2)^{1/2} = \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist also gleich

$$O = \iint_A \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos(\frac{\varphi}{4})} \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} [-\sqrt{1-\varrho^2}]_0^{\cos(\frac{\varphi}{4})} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{1-\cos^2(\frac{\varphi}{4})}+1) d\varphi = \int_0^{2\pi} (1-\sin(\frac{\varphi}{4})) d\varphi = [\varphi + 4\cos(\frac{\varphi}{4})]_0^{2\pi} = 2\pi - 4.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Der Kegelmantel des Kegels lässt sich durch die Parameterdarstellung

$$(\varrho, \varphi) \mapsto \vec{r}(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \varrho)$$

beschreiben, wobei (ϱ, φ) Polarkoordinaten in der (x, y)-Ebene bezeichnen und der Definitionsbereich B durch $0 \leq \varrho \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gegeben ist. Es gilt dann

$$\vec{r}_\varrho(\varrho, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1)$$

$$\vec{r}_\varphi(\varrho, \varphi) = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0)$$

$$\vec{r}_\varrho(\varrho, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(\varrho, \varphi) = (-\varrho \cos \varphi, -\varrho \sin \varphi, \varrho).$$

Dieser Normalenvektor ist nach innen gerichtet. Deshalb gilt für den gesuchten Fluss Φ

$$\Phi = \iint_B \vec{v}(\vec{r}(\varrho, \varphi))\vec{r}_\varrho(\varrho, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(\varrho, \varphi) d\varrho d\varphi = \iint_B \begin{pmatrix} v_1(\vec{r}(\varrho, \varphi)) \\ v_2(\vec{r}(\varrho, \varphi)) \\ v_3(\vec{r}(\varrho, \varphi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varrho \cos \varphi \\ -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \end{pmatrix} d\varrho d\varphi.$$

Ein numerisches Beispiel steht im U. Stammbach, Analysis I und II, Teil B, Kap. $VI.4$.