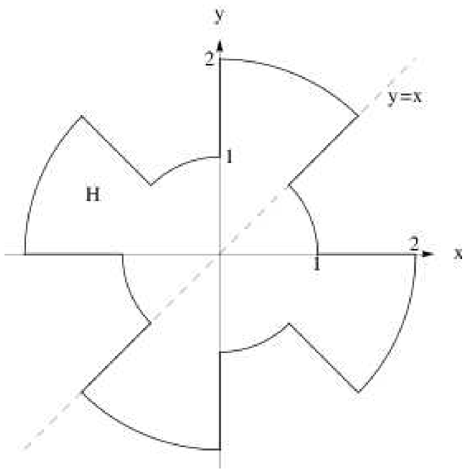
D-MAVT, D-MATL | Analysis II | FS 2013
Prof. Dr. P. Biran

Online Zwischentest - Serie 5

Willkommen zum 1. Online-Test, welcher die Serie 5 ersetzt. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, den 09.04.2013 um 22:00 Uhr** ab.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. **Viel Erfolg**!

Frage 1

Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment J_0 der folgenden homogenen Fläche H bezüglich des Koordinatenursprungs.



○ $\frac{19\pi}{4}$

√ ○ $\frac{17\pi}{4}$

○ $\frac{18\pi}{4}$

Nach Definition des polaren Flächenträgheitsmoment (siehe Vorlesung oder z.B. Mechanik) gilt

$$J_0 = \iint_H (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}F.$$

Aus Symmetriegründen genügt es die Fläche G zu betrachten, die die Einschränkung von H im ersten Quadrant ist. Es gilt dann

$$J_0 = 4 \iint_G (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}F.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wählen wir Polarkoordinaten

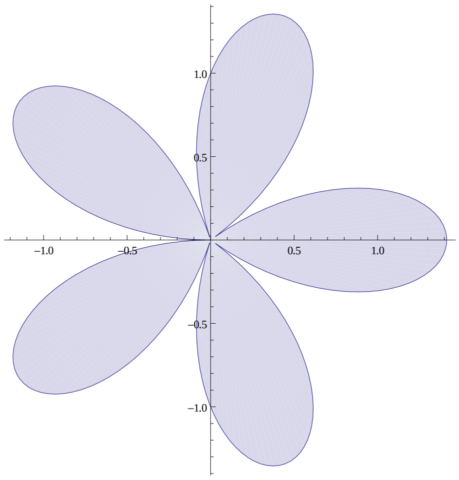
$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi \quad \text{mit} \quad 0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le r < \infty.$$

Damit ist $x^2 + y^2 = r^2$ und $\mathrm{d}F = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$. Es folgt

$$\begin{aligned}
J_0 &= 4 \iint_G (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}F = 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \right) \\
&= 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\varphi \right) = 4\left(\frac{1}{4}\,[\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} + 4\,[\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= 4\left[\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{17\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Frage 2

[Prüfung Winter 2012, Teilaufgabe] Berechnen Sie das polare Trägheitsmoment $J_0 = \int_S (x^2 + y^2) dF$ der durch die Ungleichung $\rho^2 \le 1 + \cos(5\phi)$ in Polarkoordinaten (ρ, ϕ) definierten Fläche S.



- ○ $5\pi/4$
- ○ $\pi/4$
- √ ○ $3\pi/4$

Sei $f(\phi) = \sqrt{1 + \cos(5\phi)}$. Dann:

$$J_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{f(\phi)} \rho^3 d\rho d\phi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f(\phi)^4 d\phi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(5\phi))^2 d\phi = 3\pi/4.$$

Frage 3

Das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale mit Radius R und konstanter Flächendichte bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt ist proportional zu

- ◯ R^2.
- ◯ R^3.
- √ ◯ R^4.
- ◯ $R^{9/2}$.
- ◯ R^5.

Das Trägheitsmoment bei konstanter Flächendichte $m\Delta R$ (mit m die Massendichte und ΔR die Dicke der Kugelschale) ist das Integral

$$\int m \cdot (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

In Kugelkoordinaten transformiert es sich zu

$$\int m \cdot r^2 \cos^2 \vartheta \cdot r^2 \cos \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr,$$

wobei über $\varphi \in [-\pi, \pi]$ und $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ sowie $r \in [R - \Delta R, R]$ integriert wird. Die inneren beiden Integrale über φ und ϑ liefern lediglich einen konstanten Faktor. Das verbleibende Integral $\int_{R-\Delta R}^{R} mr^4\, dr$ ist $\approx mR^4 \Delta R$, also ist (c) richtig.
Aliter: Wir wissen bereits, dass das Trägheitsmoment einer Vollkugel mit Radius R proportional zu R^5 ist. Das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale mit äusserem Radius R und Schalendicke ΔR ist folglich proportional zu $R^5 - (R - \Delta R)^5 = R^4 \cdot \Delta R$ + vernachlässigbare kleinere Terme. Also ist (c) die richtige Antwort.

Frage 4

Klicken Sie die richtigen Aussagen an.

√ ○ $\frac{1}{i} = -i$

Wahr, denn $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

√ ○ $i^{27} = -i$

Wahr, denn $i^{27} = i^{24} i^3 = i^3 = -i$.

√ ○ $i^{-9} = -i$

Wahr, denn $i^{-9} = (i^9)^{-1} = (i^8 i)^{-1} = \frac{1}{i} = -i$.

√ ○ $\frac{1+i}{2-2i} = \frac{1}{2} i$

Wahr, denn

$$\frac{1+i}{2-2i} = \frac{1}{2}\frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2}\frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1}{2}\frac{1+2i-1}{2} = \frac{1}{2}i..$$

√ ○ $|1+i-\frac{i}{1-2i}| = \frac{\sqrt{65}}{5}$

Wahr, denn

$$|1+i-\frac{i}{1-2i}| = |1+i-\frac{i(1+2i}{1-(2i)^2}| = \frac{5+5i-i+2}{5} = \frac{1}{5}|7+4i| = \frac{\sqrt{65}}{5}.$$

Frage 5

Die Lösungen der komplexen Gleichung

$$z^4 + 2z^2 + 2 = 0$$

sind gleich

○ $\pm\sqrt{2}e^{3\pi i/8}, \pm\sqrt{2}e^{5\pi i/8}$

○ $-1 \pm i$

√ ○ $\pm\sqrt[4]{2}e^{3\pi i/8}, \pm\sqrt[4]{2}e^{5\pi i/8}$

Mit der Substitution $t = z^2$ kriegen wir die quadratische Gleichung

$$t^2 + 2t + 2 = 0$$

mit Lösungen $t_{1,2} = -1 \pm i$, deren 2-Wurzeln die Lösungen der uhrsprünglichen Gleichung sind:

Die 2-Wurzeln von $-1+i = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$ sind $\pm\sqrt[4]{2}e^{3\pi i/8}$.
Die 2-Wurzeln von $-1-i = \sqrt{2}e^{5\pi i/4}$ sind $\pm\sqrt[4]{2}e^{5\pi i/8}$.

Frage 6

Klicke die **falschen** Aussagen an:

- ◯ div ordnet einem Vektorfeld ein Skalarfeld zu.
- √ ◯ $\mathrm{div}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)$
- ◯ div des Coulombfeldes ist Null.
- ◯ grad ordnet einem Skalarfeld ein Vektorfeld zu.
- ◯ $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{v})$ ist eine sinnvolle Bildung.
- ◯ $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{v})$ ist eine sinnvolle Bildung.
- √ ◯ $\mathrm{rot}(\mathrm{div}\vec{v})$ ist eine sinnvolle Bildung.
- ◯ rot des Coulombfeldes ist Null.
- ◯ $\mathrm{div}(\mathrm{grad}f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

Frage 7

Klicke die **falschen** Aussagen an:

- √ ◯ $\mathrm{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $\mathrm{grad}(x + y + z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(x + y + z)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ◯ $\mathrm{rot}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ◯ $\mathrm{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$

Frage 8

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(xz^\alpha r,\ yz^\beta r,\ z^2 r^3\right) \quad \text{mit} \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für welche Konstanten α und β ist $rot(\vec{v}) = \vec{0}$?

- ◯ $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.
- ◯ $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.
- ◯ $\alpha = 3$ und $\beta = 2$.
- √ ◯ $\alpha = 3$ und $\beta = 3$.

Wir verwenden $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$.

$$\mathbf{rot}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xz^\alpha r \\ yz^\beta r \\ z^2 r^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3yz^2 r - \beta yz^{\beta-1} r \\ \alpha xz^{\alpha-1} r - 3xz^2 r \\ xyz^\beta r^{-1} - xyz^\alpha r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = 3.$$

Somit ist d) die richtige Antwort.

Frage 9

Es ist eine Fläche gegeben durch die Parameterdarstellung $(u, v) \to \vec{r}(u, v)$. Der Vektor $\vec{n}(u, v)$ bezeichnet wie üblich den Normaleneinheitsvektor zur Fläche. Es sei P_0 der Punkt auf der Fläche, der zu (u_0, v_0) gehört. Klicken Sie die **falsche** Aussage an.

- √ ◯ $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$.
- ◯ Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ liegt in einer Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.
- ◯ Wenn $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, dann spannen sie die Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.
- ◯ Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ ist tangential an die u-Linie, die durch P_0 geht.

Die falsche Aussage ist die a), denn

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \pm \frac{\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)}{|\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)|}.$$

Frage 10

Welche der folgenden Abbildungen ist eine Parameterdarstellung der Mantelfläche des Kegels mit Spitze $(0,0,1)$ und Grundfläche die Einheitskreisscheibe um $(0,0,0)$ in der xy-Ebene?

√ ◯ $(u,v) \mapsto (u,v,1-\sqrt{u^2+v^2})$, mit $u^2+v^2 \leq 1$.

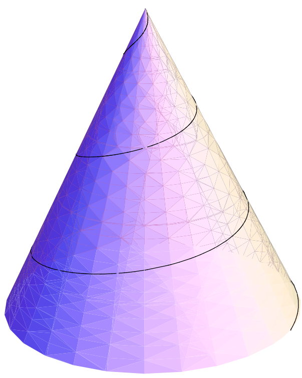
◯ $(u,v) \mapsto (u,v,1-\sqrt{u^2+v^2})$, mit $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$.

◯ $(u,v) \mapsto (\sqrt{u^2+v^2}, 0, 1-u)$, mit $u^2+v^2 \leq 1$.

√ ◯ $(u\cos v, u\sin v, 1-u)$, mit $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$.

Frage 11

Welche der folgenden Parametrisierungen beschreibt die in der Abbildung gezeichnete Bahn einer sich auf der Kegeloberfäche bewegenden Ameise.



◯ $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, ht)$, mit $0 \leq t \leq 1$.

◯ $t \mapsto (a(1-t)\cos t, a(1-t)\sin t, ht)$, mit $0 \leq t \leq 1$.

√ ◯ $t \mapsto (a(1-\frac{t}{2\pi})\cos(3t), a(1-\frac{t}{2\pi})\sin(3t), h\frac{t}{2\pi})$, mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

Die Parametrisierung $a)$ beschreibt eine Spirale auf einer Zylinderoberfläche und ist deswegen falsch. Die Aussage $b)$ ist auch falsch, da dort würde die zugehörige Anzahl von Umdrehungen nicht gleich die gewünschten 3 sein.

Frage 12

[Prüfung Winter 2012, Teilaufgabe] Eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ wird wie folgt definiert: Für jedes $h \in \mathbb{R}$ ist der Schnitt mit der horizontalen Ebene $z = h$ eine Gerade, die durch die z-Achse geht und einen Winkel $\frac{h}{L}$ mit der xz-Ebene einschliesst ($L > 0$ ist ein Parameter). Eine Parameterdarstellung dieser Fläche ist gegeben durch

√ ◯ $\vec{r}(t, \phi) = (t\cos(\phi), t\sin(\phi), L\phi)$, für $t, \phi \in \mathbb{R}$.

◯ $\vec{r}(t, \phi) = (t\cos(\phi), t\sin(\phi), \phi)$, für $t, \phi \in \mathbb{R}$.

◯ $\vec{r}(t, \phi) = (t\cos(\phi), t\sin(\phi), L)$, für $t, \phi \in \mathbb{R}$.

Frage 13

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der sphärischen Kappe

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ , z \geq h\}.$$

zur Höhe $h > 0$ vom Radius R und mit Mittelpunkt im Ursprung.

◯ $2\pi Rh$

◯ $4\pi Rh$

◯ $4\pi(R - h)R$

√ ◯ $2\pi(R - h)R$

Eine Parameterdarstellung der Oberfläche der Kugel mit Radius R und Millepunkt im Ursprung ergibt sich mit Hilfe der Kugelkoordinaten

$$(\phi, \psi) \mapsto \vec{r}(\phi, \psi) = (R\sin\psi\cos\phi, R\sin\psi\sin\phi, R\cos\psi),$$

mit $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und $0 \leq \psi \leq \psi_0$ für (da $h = R\cos(\psi_0)$)

$$\psi_0 = arccos(\frac{h}{R}).$$

Es gilt

$$\vec{r}_\phi(\phi, \psi) = (-R\sin\psi\sin\phi, R\sin\psi\cos\phi, R\cos\psi)$$
$$\vec{r}_\psi(\phi, \psi) = (R\cos\psi\cos\phi, R\cos\psi\sin\phi, -R\sin\psi)$$
$$\vec{r}_\phi(\phi, \psi) \times \vec{r}_\psi(\phi, \psi) = (-R^2\sin^2\psi\cos\phi, -R^2\sin^2\psi\sin\phi, -R^2\sin\psi\cos\phi).$$

Es ergibt sich

$$d\mathcal{O} = |\,\vec{r}_\phi(\phi, \psi) \times \vec{r}_\psi(\phi, \psi)\,| d\phi d\psi = R^2 \sin\psi d\phi d\psi$$

und daher

$$\mathcal{O} = \int_0^{2\pi} \int_0^{arccos(\frac{h}{R})} R^2 \sin\psi d\psi d\phi = 2\pi R^2 \int_0^{arccos(\frac{h}{R})} \sin\psi d\psi = 2\pi R^2 [-\cos\psi]_0^{arccos(\frac{h}{R})} =$$

$$= 2\pi R^2(-\frac{h}{R} + 1) = 2\pi R(R - h).$$

Frage 14

Der Oberflächeninhalt des Graphs $z = f(x, y)$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist

○ $\int\int_D dxdy$

○ $\int\int_D \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, dxdy$

√ ○ $\int\int_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, dxdy$

○ $\int\int_D |\, f_x(x,y) \times f_y(x,y)\,|\, dxdy$

Eine Parametrisierung des Graphs ist durch

$$(x, y) \mapsto \vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{r}_x(x,y) &= (1, 0, f_x(x,y)) \\ \vec{r}_y(x,y) &= (0, 1, f_y(x,y)) \\ \vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y) &= (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1). \end{aligned}$$

Daher

$$d\mathcal{O} = \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1}\, dxdy$$

und

$$\mathcal{O} = \int\int_D \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1}\, dxdy.$$

Frage 15

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \vec{v}(x, y, z) = \big(x, y^2 + z, 3x\big)$$

durch das Dreieck D mit Ecken $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ in Richtung $\vec{n}(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

√ ◯ $\frac{1}{2}$

◯ 3

◯ $-\frac{1}{2}$

$D = \{(x, y, 0) \,|\, x \in [0, 1],\ y \in [0, 1 - x]\}$.
Der Fluss ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_D \vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) \mathrm{d}O \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \begin{pmatrix} x \\ y^2 + 0 \\ 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} 3x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= 3 \int_0^1 x((1 - x) - 0) \, \mathrm{d}x = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Frage 16

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}:(x,y,z)\longmapsto \vec{v}(x,y,z)=\left(yz,y^2z,yz^2\right)$$

von innen nach aussen durch den Zylindermantel

$$M=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2=1, 0\leq z\leq 1\right\}.$$

√ ○ 0

○ $\frac{1}{2}$

○ $-\frac{1}{2}$

Eine Parametrisierung des Zylindermantels ist gegeben durch

$$\vec{r}:(\varphi,z)\longmapsto(\cos\varphi,\sin\varphi,z)\quad\text{mit}\quad 0\leq\varphi<2\pi\quad\text{und}\quad 0\leq z\leq 1.$$

Wir berechnen den Normalenvektor

$$\vec{n}\,(\varphi,z)=\vec{r}_\varphi\,(\varphi,z)\times\vec{r}_z\,(\varphi,z)=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}.$$

Somit ist der Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{v}$ von innen nach aussen durch M gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int\int_M \vec{v}\cdot\vec{n}dO=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \underbrace{\vec{v}\,(\cos\varphi,\sin\varphi,z)}_{\left(z\sin\varphi,z\sin^2\varphi,z^2\sin\varphi\right)}\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi,0)\,dzd\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\left[z\sin\varphi\cdot\cos\varphi+z\sin^2\varphi\cdot\sin\varphi+z^2\sin\varphi\cdot 0\right]dzd\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{z^2}{2}\left(\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\sin^3\varphi\right)\right]_0^1 d\varphi\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\underbrace{\sin^3\varphi}_{\sin\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)}\right)d\varphi\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{2\pi}+\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}+\left[\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{2\pi}\right)=0.
\end{aligned}$$

Frage 17

Der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y, z) = (x, y, z)$$

durch das Paraboloid

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

von oben nach unten ist gleich

- ○ $-\frac{3}{2}\pi$
- ○ $\frac{3}{2}\pi$
- √ ○ $\frac{\pi}{2}$
- ○ $-\frac{\pi}{2}$

1. Methode: *"direkt"*.
Eine Parameterdarstellung des Paraboloids P ist durch

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

gegeben. Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, v) &= (1, 0, 2u) \\ \vec{r}_v(u, v) &= (0, 1, 2v) \\ \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) &= (-2u, -2v, 1). \end{aligned}$$

Also der Fluss durch P von oben nach unten ist gleich

$$\Phi_P = \int\int_P \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{O} = \int\int_P \vec{v}(\vec{r}(u, v)) \cdot (-\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v))\, dudv =$$

$$= \int\int_P \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ -1 \end{pmatrix} dudv = \int\int_P (u^2 + v^2) dudv.$$

Mit Polarkoordinaten kriegen wir

$$\Phi_P = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

2. Methode: *"Gauss'schen Divergenzsatz"*.
Nach dem Gauss'schen Divergenzsatz ist der Fluss von $\vec{v}$ von innen nach aussen durch die berandende Fläche ∂B des gefüllten Paraboloids B gleich dem Volumenintegral der Divergenz von $\vec{v}$ über den Berech B. Die Divergenz von $\vec{v}$ ist gleich

$$div\vec{v}(x, y, z) = 3,$$

und also der Fluss

$$\Phi_B = \int\int\int_B div\vec{v}\, dV = 3Vol(B) \overset{(*)}{=} 3\int_0^1 z\pi dz = \frac{3}{2}\pi,$$

wobei für (*) haben wir die selbe Idee wie in der Serie 1, Aufgabe 3, Methode 1 benützt. Die berandende Fläche ∂B des gefüllten Paraboloids B besteht aus einem Kreis zur Höhe 1

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ z = 1\}$$

und aus dem Paraboloid

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sei Φ_K der Fluss durch K (von unten nach oben) und Φ_P der gesuchten Fluss durch P (von oben nach unten). Es gilt:

$$\Phi_P + \Phi_K = \Phi_B,$$

und also

$$\Phi_P = \Phi_B - \Phi_K.$$

Berechnen wir zuerst den Fluss durch K. Mit

$$\vec{n}(x, y, z) = (0, 0, 1)$$

rechnen wir den Fluss von unten nach oben aus:

$$\Phi_K = \int\int_K \vec{v} \cdot \vec{n} d\mathcal{O} = \int\int_K 1 dx dy = \pi,$$

da auf K ist $z = 1$ und da die Fläche des Kreises K vom Radius 1 gleich π ist.
Der gesuchten Fluss durch P, von oben nach unten, ist also gleich

$$\Phi_P = \frac{3}{2}\pi - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Frage 18

Es seien $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

○ $\operatorname{div}(h(x)\vec{v}(x)) = \nabla(h(x)) \cdot \vec{v}(x) - h(x) \operatorname{div} \vec{v}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

○ $\operatorname{div}(h(x)\vec{v}(x)) = \dfrac{\nabla(h(x)) \cdot \vec{v}(x)}{h(x) \operatorname{div} \vec{v}(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

√ ○ $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

○ $\operatorname{rot}(\nabla h(x)) = (1, 1, 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Sei $x \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$. Die richtige Antwort ist c), denn:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}(x)) = (\partial_1\partial_2 v_3(x) - \partial_1\partial_3 v_2(x)) + (\partial_2\partial_3 v_1(x) - \partial_2\partial_1 v_3(x)) + (\partial_3\partial_1 v_2(x) - \partial_3\partial_2 v_1(x)) = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit mit dem Satz von Schwarz folgt.
Die Aussagen a) und b) sind falsch, da für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\operatorname{div}(h(x)\vec{v}(x)) = \nabla(h(x)) \cdot \vec{v}(x) + h(x) \operatorname{div} \vec{v}(x).$$

Die Aussage d) ist falsch, da die Rotation eines Gradientenfeldes Null ist, d.h.

$$\operatorname{rot}(\nabla h(x)) = (0, 0, 0).$$

Frage 19

Es sei B die Einheitskugel um den Ursprung. Für welches der folgenden Vektorfelder darf der Divergenzsatz für den Bereich B **nicht** angewendet werden?

○ $\vec{v} = (x, y, z)$

√ ○ $\vec{v} = C \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

○ $\vec{v} = (xyz, x^2z^2, x^3ze^y)$

○ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

○ $\vec{v} = \vec{a}$

Der Gauss'schen Divergenzsatz darf im Fall von

$$\vec{v} = C \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

für den Bereich B nicht angewendet werden, da $(0, 0, 0)$ nicht im Definitionbereich von $\vec{v}$ und daher auch nicht im Definitionsbereich von $\operatorname{div} \vec{v}$ liegt. Dafür ist das Coulomb'sche Feld ein Beispiel.

Frage 20

Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst quellenfrei wenn $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ und wirbelfrei wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Quellenfreie Vektorfelder sind auch wirbelfrei.

○ Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sind quellenfrei.

√ ○ Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ sind quellenfrei.

○ Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ sind wirbelfrei.

Die Aussage $c)$ ist richtig, da $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{w} = 0$.

Die Aussage $a)$ ist falsch; zum Beispiel das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ ist quellenfrei aber nicht wirbelfrei:

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Aussage $b)$ ist falsch, da

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$$

nicht immer Null ist. Die Aussage $d)$ ist falsch, da für $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{w}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{w}) - \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \\ \Delta w_3 \end{pmatrix}$$

nicht immer gleich Null ist.

Frage 21

[Prüfung Winter 2009] Das Hagen–Poiseuille–Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \left(0, 0, \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) v_0\right)$$

beschreibt die Strömung einer zähen Flüssigkeit in einer zylindrischen Leitung mit Durchmesser $2a$. Wie gross ist v_0 in Metern pro Sekunde, wenn die Leitung eine Querschnittsfläche von 5 cm^2 hat und 1 Liter pro Sekunde fliessen soll?

[The Hagen–Poiseuille velocity field describes the flow of a viscous fluid in a cylindrical pipe. How big is v_0 in meter per second if the pipe has a cross sectional area of 5 cm^2 and 1 liter per second is required to flow through the pipe?]

○ $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$

√ ○ $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$

○ $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$

Der Fluss Φ der Flüssigkeit durch die Leitung ist gegeben durch

$$\iint_\Sigma \vec{v} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}F,$$

wobei Σ der Querschnitt ist und $\vec{n} = (0, 0, 1)^\top$ der Normalvektor zu Σ.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_\Sigma \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) v_0 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) v_0 \, r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi v_0 \int_0^a \left(r - \frac{r^3}{a^2}\right) \mathrm{d}r \\
&= 2\pi v_0 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4a^2}\right) = \pi v_0 \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} A v_0,
\end{aligned}$$

wobei A die Querschnittsfläche ist.

$$\begin{aligned}
&\Phi = \frac{1}{2} A v_0 = \frac{1}{2} 5\,\mathrm{cm}^2 \cdot v_0 = \frac{5}{2} 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot v_0 \stackrel{!}{=} 1\,\mathrm{L/s} = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} \\
&\Longrightarrow v_0 = 4\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$