Musterlösungen Serie 6

1. Frage 1

[Analysis Prüfung Winter 2012] Ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ erfülle $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$. Was folgt?

○ Es gibt eine Funktion $f(x, y, z)$ mit $\vec{v} = \mathrm{grad}\, f$.

Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel, erfüllt $\vec{v}(x, y, z) = (y, 0, 0)$ die Voraussetzung $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$ auf $\mathbb{R}^3$, aber es existiert keine Funktion $f(x, y, z)$ mit $\vec{v} = \mathrm{grad}\, f$. Gäbe es eine solche Fuktion f, so würde

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\, f(x, y, z),$$

und also

$$f_{xy}(x, y, z) \neq f_{yx}(x, y, z).$$

○ Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kreisscheibe D in der xy-Ebene verschwindet.

Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel, erfüllt $\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, 1)$ die Voraussetzung $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, aber der Fluss durch die Einheitskreisscheibe D, von unten nach oben, ist gleich

$$\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dF = \int_D dF \neq 0.$$

√ ○ Der Fluss $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.

Die Aussage ist nach dem Gauss'schen Divergenzsatz wahr. Beachte, dass jede Kugel im Definitionsbereich von $\vec{v}(x, y, z)$ enthalten ist.

Frage 2

[Analysis Prüfung He 1992] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (yz, y^2 z, yz^2)$$

von innen nach aussen durch den Zylindermantel

$$M = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0, 1]\}.$$

○ 2π

√ ○ 0

○ 1

Eine Parametrisierung des Zylindermantels ist

$$\vec{r} : (\varphi, z) \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$

mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 \leq z \leq 1$. Damit folgt für den Fluss

$$\Phi = \iint_M \vec{v}\cdot\vec{n} dO = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (z\sin\varphi, z\sin^2\varphi, z^2\sin\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (z\cos\varphi\sin\varphi + z\sin^3\varphi) dz = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 3

[Analysis Prüfung Frühling 2013] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$\vec{v} = (xyz,\ y\sin(xz),\ x^3 + y^3 + z^3)$$

durch die Oberfläche des Würfels

$$W = \{(x, y, z) \mid -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 1\}$$

von innen nach aussen.

○ 4

√ ○ 8

○ 16

Die ersten zwei Summanden der Divergenz von $\vec{v}$

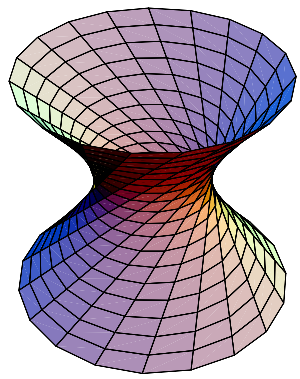
$$div(\vec{v}) = yz + \sin(xz) + 3z^2$$

sind ungerade in z. Deswegen ist der Fluss gleich

$$\int_W 3z^2 dxdydz = [4z^3]_{-1}^{1} = 8.$$

2. a) Eine Parameterdarstellung der Geraden ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \qquad -\infty < t < \infty.$$



Als zweiten Parameter für die Flächendarstellung wählt man den Drehwinkel ϕ der Drehung um die z-Achse, deren Matrix durch

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. So erhält man für die Parameterdarstellung der Fläche

$$\vec{r}(t, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi - t\sin\phi \\ \sin\phi + t\cos\phi \\ t \end{pmatrix} \qquad -\infty < t < \infty,\ 0 \le \phi \le 2\pi.$$

b) Aus der Parameterdarstellung folgt $z = t$. Dies eingesetzt führt zu

$$x = \cos\phi - z\sin\phi, \qquad y = \sin\phi + z\cos\phi \quad \text{und daraus} \quad x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

Die Gleichung der Fläche lautet also $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Bitte wenden!

c) Der Gradient $(2x, 2y, -2z)$ der Flächengleichung steht senkrecht zur Fläche. Also

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff y = z \;\&\; z = x.$$

Da der Punkt auf der Fläche sein soll, folgt $x^2 + y^2 - z^2 = x^2 = 1$ und somit $x = \pm 1$. Man erhält somit die beiden Punkte $P_1 = (1,1,1)$ und $P_2 = (-1,-1,-1)$.

d) Eine Parameterdarstellung des Flächenstückes ist gegeben durch

$$\vec{r}(t,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi - t\sin\phi \\ \sin\phi + t\cos\phi \\ t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2,\; 0 \le \phi \le 2\pi.$$

Man berechnet den Betrag des Normalenvektors

$$|\vec{r}_t \times \vec{r}_\phi| = \left| \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\phi - t\cos\phi \\ \cos\phi - t\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\cos\phi + t\sin\phi \\ -\sin\phi - t\cos\phi \\ t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+2t^2}$$

und erhält für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+2t^2}\,dt\,d\phi = 2\pi \int_0^2 \sqrt{1+2t^2}\,dt \\ &= 2\pi \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\,t\sqrt{1+2t^2} + \log(\sqrt{2}\,t + \sqrt{1+2t^2})\right]_0^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\big(\sqrt{2}\cdot 2\cdot 3 + \log(\sqrt{2}\cdot 2 + 3)\big) \\ &= 6\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\log\big(3 + 2\sqrt{2}\big) \doteq 22.77\,. \end{aligned}$$

3. Sei $z = f(x,y)$ oder $z = f(\varrho, \vartheta)$ eine Fläche.
Das Volumen V unter der Fläche ist das Volumen einer vertikalen Säule mit der Fläche als Deckel und der xy-Ebene als Basis. Das ist gegeben durch das Doppelintegral

$$V = \int\int_R z\,dA$$

wobei R die Basis ist.
Die Fläche S des Teils R' einer Fläche über dem Bereich R ist gegeben durch das Doppelintegral

$$S = \int\int_R \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dA$$

Falls die Fläche durch $x = f(y,z)$ gegeben ist und der Bereich R auf der yz-Ebene liegt, dann

$$S = \int\int_R \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2}\,dA$$

Falls die Fläche durch $y = f(x,z)$ gegeben ist und der Bereich R auf der xz-Ebene liegt, dann

$$S = \int\int_R \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2}\,dA$$

Siehe nächstes Blatt!

Für unsere Aufgabe gibt es drei mögliche Lösungswege:
1. Lösung:
Die Projektion der vorgeschriebenen Fläche in die xy-Ebene ist die Kreisscheibe R: $x^2 + y^2 \leq 4y$. Für den Kegel,
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{3z}$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{3z}$.
So ist $1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = \frac{9z^2+x^2+y^2}{9z^2} = \frac{12z^2}{9z^2} = \frac{4}{3}$.
Es folgt:

$$S = \int\int_R \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\, dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx\, dy = 2\frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx\, dy =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$$

2. Lösung:
Die Projektion einer Hälfte der vorgeschriebenen Fläche in die yz-Ebene ist der Bereich R beschränkt durch die Gerade $y = \sqrt{3}z$ und die Parabel $y = \frac{3}{4}z^2$. Diese letzte wurde durch die Elimination von x aus der Gleichung der zwei Flächen erhalten. Für den Kegel,
$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}$ und $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{3z}{x}$.
So ist $1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2 = \frac{x^2+y^2+9z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{3z^2-y^2}$.
Es folgt:

$$S = \int\int_R \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2}\, dA = 2\int_0^4 \int_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{3z^2 - y^2}}\, dz\, dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{3z^2 - y^2}\Big|_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} dy =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$$

3. Lösung:
Wir verwenden die Polarkoordinaten in der Lösung 1. Wir müssen $1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = \frac{4}{3}$ auf der Kreisscheibe$R$: $\varrho \leq 4\sin(\vartheta)$ integrieren. Es folgt:

$$S = \int\int_R \frac{2}{\sqrt{3}}\, dA = \int_0^\pi \int_0^{4\sin(\vartheta)} \frac{2}{\sqrt{3}}\varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \varrho^2\Big|_0^{4\sin(\vartheta)} d\vartheta = \frac{16}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \sin^2(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$$

4. **a)** Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\vec{v} &= c\left(-a^2\frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)4x}{(x^2+y^2)^3} - a^2\frac{2x(x^2+y^2) - 2xy4y}{(x^2+y^2)^3}\right) \\ &= -ca^2\left(\frac{2x^3 + 2xy^2 - 4x^3 + 4xy^2 + 2x^3 + 2xy^2 - 8xy^2}{(x^2+y^2)^3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Klar ist, dass die 1. und 2. Komponente von $\mathbf{rot}\,\vec{v}$ verschwinden.

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot}\,\vec{v})_3 &= c\left(-a^2\frac{2y(x^2+y^2)-2xy4x}{(x^2+y^2)^3}+a^2\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)4y}{(x^2+y^2)^3}\right)\\ &= ca^2\left(\frac{-2x^2y-2y^3+8x^2y-2x^2y-2y^3-4x^2y+4y^3}{(x^2+y^2)^3}\right)=0\end{aligned}$$

c) Sei $P=(x_0,y_0,z_0)$ ein Punkt auf der Zylinderoberfläche, d. h. $x_0^2+y_0^2=a^2$. Der Tangentialvektor $\vec{T}$ in P parallel zur xy-Ebene ist gegeben durch $\vec{T}=(-y_0,x_0,0)$.

$$\vec{v}(x_0,y_0,z_0)=c\left(1-a^2\frac{a^2-y_0^2-y_0^2}{a^4},\,-a^2\frac{2x_0y_0}{a^4},\,0\right)=c\left(\frac{2y_0^2}{a^2},\,\frac{-2x_0y_0}{a^2},\,0\right)=-\frac{2cy_0}{a^2}\cdot\vec{T}$$

Das heisst $\vec{v}\parallel\vec{T}$.

d) Sei $P=(x,y,z)$ ein Punkt im Abstand R von der z-Achse, d. h. $x^2+y^2=R^2$. Dann gilt

$$|x^2-y^2|\le x^2+y^2 \quad \text{und} \quad \frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{a^2(x^2-y^2)}{R^4}\to 0 \quad \text{für} \quad R\to\infty$$

$$|2xy|\le x^2+y^2 \quad \text{und} \quad \frac{a^2 2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{a^2 2xy}{R^4}\to 0 \quad \text{für} \quad R\to\infty$$

Also strebt $\vec{v}\to(c,0,0)$ für $R\to\infty$.

Aus c) folgt für den Betrag der Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche

$$|\vec{v}|=\left|-\frac{2c}{a^2}y_0\right||\vec{T}|=2|c|\left|\frac{y_0}{a}\right|.$$

Man sieht sofort, dass $|\vec{v}|$ minimal ist auf der x-Achse und maximal auf der y-Achse.