Musterlösungen Serie 7

1. Frage 1

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

○ Potentialfelder sind wirbelfrei.

√ ○ Potentialfelder sind quellenfrei.

○ Potentialfelder sind Gradientenfelder.

Die Aussage $a)$ ist wahr, da

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0$$

ist. Die Aussage $c)$ ist wahr, da Potentialfelder sind nach Definition Gradientenfelder. Die Aussage $b)$ ist falsch, da

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \Delta f$$

nicht immer Null ist.

Frage 2

Die Arbeit A eines Vektorfeldes $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(1,0,0)$ nach $(-1,-1,-1)$ sei 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit B von $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(-1,-1,-1)$ nach $(1,0,0)$ berechnet? Klicke die **richtige** Aussage an:

○ Die Arbeit B lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

○ Die Arbeit B beträgt ebenfalls 5.

√ ○ Die Arbeit B beträgt -5.

Wenn W einen Weg und $-W$ den Weg mit dem ungekehrten Durchlaufsinn bezeichnet, dann gilt

$$\int_{-W} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_W \vec{v} \cdot (-d\vec{r}) = -\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$

Deswegen ist $c)$ die richtige Antwort.

Bitte wenden!

Frage 3

Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential?

○ $(x - y,\, x - y)$

○ $(x^2 - y,\, x^3 + 2xy)$

√ ○ $(x^3 + 2xy,\, x^2 - y)$

○ $(x^3 - xy^2,\, x^2y - y^5)$

Ein C^1-Vektorfeld $K = (P, Q)$ auf $\mathbb{R}^2$ besitzt ein Potential genau dann, wenn $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist. Diese partiellen Ableitungen sind im Fall (a) gleich $-1 \neq 1$, im Fall (b) gleich $-1 \neq 3x^2 + 2y$, im Fall (c) gleich $2x = 2x$, und im Fall (d) gleich $-2xy \neq 2xy$. Also lautet die richtige Antwort (c). Das zugehörige Potential ist in diesem Fall gleich $\frac{x^4}{4} + x^2y - \frac{y^2}{2} + c$ für eine beliebige Konstante c.

Frage 4

Die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\right)$$

entlang des Einheitskreises γ in der (y, z)–Ebene leistet, ist gleich ... (der Durchlaufsinn von γ bilde mit der x–Achse eine Rechtsschraube)

○ π.

√ ○ 3π.

○ $\frac{\pi}{2}$.

○ 0.

Sei E die Einheitskreisscheibe in der (y, z)–Ebene, also $\gamma = \partial E$ (∂E bezeichnet den Rand von E). Wir berechnen

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 2z - 2z \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ auf E mit dem γ eine Rechtsschraube bildet, ist $(1, 0, 0)$. Nach dem Satz von Stokes ist die gesuchte Arbeit A gegeben durch

$$A = \int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_E \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}O = \iint_E \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}O = 3\underbrace{\iint_E \mathrm{d}O}_{\text{Fläche von } E \,=\, \pi} = 3\pi.$$

Damit ist b) die richtige Antwort.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 5

Für welche a ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\ln\left(1 + x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)$$

von der Form $\vec{v} = \mathbf{grad} f$ für eine gewisse Funktion $f = f(x, y, z)$ (die man nicht zu bestimmen braucht)?

○ $a = 0.$

○ $a = -1/2.$

√ ○ $a = 1/2.$

○ $a = 1/2$ und $a = -1/2.$

○ Es gibt kein solches a, da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Wir benutzen den Satz 4 vom Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 71. Es gilt

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ y - 2ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathrm{D}(\vec{v})$$

$$\Longleftrightarrow y - 2ay = y(1 - 2a) = 0 \ \text{ für alle } (x, y, z) \in \mathrm{D}(\vec{v}).$$

Daraus folgt, dass $1 - 2a = 0$ oder $a = \frac{1}{2}$. Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist für $a = \frac{1}{2}$ der ganze Raum $\mathbb{R}^3$, da $\ln\big(\underbrace{1 + x^2}_{>0}\big)$ definiert ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $\mathrm{D}(\vec{v})$ einfach zusammenhängend und nach dem oben erwähnten Satz gilt

$$a = \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{es gibt ein } f \text{ mit } \mathbf{grad} f = \vec{v}.$$

Die richtige Antwort ist somit c).

Bitte wenden!

Frage 6

Welche der folgender Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind einfach zusammenhängend?

$\surd$ ○ $\mathbb{R}^2$

$\surd$ ○ Kreisscheibe

$\surd$ ○ $\mathbb{R}^2 \setminus x-$Achse

○ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$

○ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\}$

Ein Bereich D heisst einfach zusammenhängend, wenn sich jeder geschlossene Weg W in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.
Die ganze Ebene $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend und so sind die Kreisscheibe und die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus x-$Achse. Das Komplement einer vollen Ellipse und die Ebene, aus der man einen Punkt P entfernt hat, sind nicht einfach zusammenhängend, denn eine geschlessene Kurve, die die Ellipse einkreist oder um P herumführt, lässt sich nicht auf einen Punkt stetig zusammenziehen. Deswegen sind die Aussagen $d)$ und $e)$ falsch.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 7

Welche der folgender Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend?

√ ○ $\mathbb{R}^3$

√ ○ Kugel

○ $\mathbb{R}^3 \setminus x-$Achse

√ ○ $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1,2,3)\}$

√ ○ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1\}$

Ein Bereich D heisst einfach zusammenhängend, wenn sich jeder geschlossene Weg W in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.
Der ganze Raum $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. So sind die Kugel und das Komplement einer vollen Ellipsoid. Der ganze Raum, aus dem man einen Punkt entfernt hat, ist einfach zusammenhängend, da beim Zusammenziehen einer geschlossenen Kurve lässt sich dieser eine Punkt immer vermeiden. Der ganze Raum, aus dem man eine Gerade entfernt hat, ist nicht einfach zusammenhängend, denn eine geschlossene Kurve, die um diese Gerade herumführt, lässt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen. Deswegen ist die Aussage c) falsch und d) richtig.

2. a) Wir definieren nach dem Hinweis das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x,y,z) \mapsto \vec{v}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0).$$

Es gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Fläche S als Fläche in $\mathbb{R}^3$ auf der xy-Ebene mit Rand ∂S und (ohne Beschränkungen der Allgemeinheit) Normalenvektor $\vec{n} = (0,0,1)$. Die Arbeit von $\vec{v}$ längs ∂S im positiven Durchlaufsinn beträgt

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} P\, dx + Q\, dy,$$

die nach dem Satz von Stokes gleich

$$\int\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} d\mathcal{O} = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

ist.

b) Mit der Wahl $P(x,y) = 0$ und $Q(x,y) = \frac{x^2}{2}$ erhalten wir

$$\int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\int_S x\, dxdy \overset{a)}{=} \int_{\partial S} \frac{x^2}{2} dy.$$

Die x-Komponente des Schwerpunkts ist also gleich

$$\frac{1}{Fl(S)} \int\int_S x\, dxdy = \frac{1}{2Fl(S)} \int_{\partial S} x^2 dy.$$

Bitte wenden!

Analog, mit der Wahl $P(x,y) = -\frac{y^2}{2}$ und $Q(x,y) = 0$ erhalten wir

$$\int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_S y\, dxdy \overset{a)}{=} \int_{\partial S} \frac{y^2}{2} dx.$$

Die y-Komponente des Schwerpunkts ist also gleich

$$\frac{1}{Fl(S)} \int\int_S y\, dxdy = \frac{1}{2Fl(S)} \int_{\partial S} y^2 dx.$$

Endlich, mit der Wahl $P(x,y) = -\frac{y^3}{3}$ und $Q(x,y) = \frac{x^3}{3}$ erhalten wir das polare Trägheitsmoment

$$\int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_S (x^2+y^2)\, dxdy \overset{a)}{=} \int_{\partial S} \frac{x^3}{3} dy - \frac{y^3}{3} dx.$$

3. Setzen wir die Definition des Flusses $Z = \iint_S \vec{H} \cdot \vec{n} dO$ in der folgenden Gleichung ein:

$$V_{ind} = -\mu_0 \frac{dZ}{dt} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{n}\, dO = -\mu_0 \iint_S \vec{H}_t \cdot \vec{n}\, dO.$$

Auf der anderen Seite, nach dem Satz von Stokes, gilt es, dass

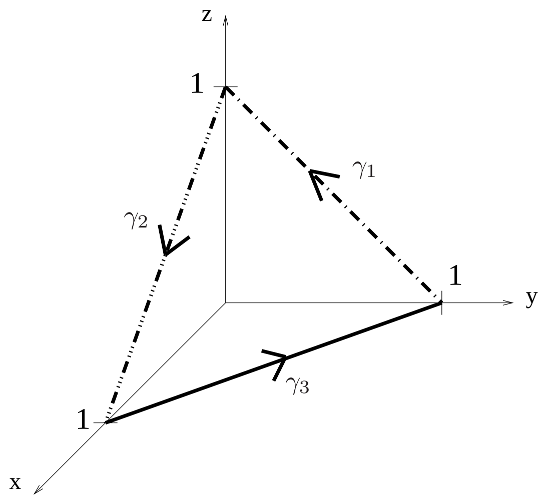
$$V_{ind} = \int_C \vec{E}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dO.$$

Da diese Beziehung für sämtliche mögliche Fächen S gelten muss, gilt die Maxwell'sche Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \vec{H}_t = 0.$$

(Vgl. U. Stammbach, Analysis, Teil B, Kap. $VI.9$, S. 65.)

4. **a)** Wir parametrisieren die Kurve γ_1 durch



$$\gamma_1 : t \longmapsto (0, 1-t, t) \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 1.$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit ist $\frac{d}{dt}\gamma_1(t) = (0,-1,1)$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^1 \vec{v}\left(\gamma_1(t)\right)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_1(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -0^3 - 2\cdot 0 + t \\ -(1-t)^3 - 2(1-t) + 0 \\ -t^3 - 2t + (1-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(-2t^3 + 3t^2 - 8t + 4\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t^4 + t^3 - 4t^2 + 4t\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} + 1 - 4 + 4 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Die Kurven γ_2 und γ_3 können analog parametrisiert werden

$$\begin{aligned}
\gamma_2 : &\quad t \longmapsto (t, 0, 1-t) \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\gamma_2(t) = (1, 0, -1) \\
\gamma_3 : &\quad t \longmapsto (1-t, t, 0) \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\gamma_3(t) = (-1, 1, 0).
\end{aligned}$$

Aus den Symmetrien von $\vec{v}$ sieht man, dass

$$\vec{v}\left(\gamma_1(t)\right)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_1(t) = \vec{v}\left(\gamma_2(t)\right)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_2(t) = \vec{v}\left(\gamma_3(t)\right)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_3(t).$$

Damit folgt

$$\int_{\gamma} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

b) Sei F das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist somit gleich $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Weiter gilt, dass

$$\mathbf{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_F \mathbf{rot}\vec{v}\cdot \vec{n}\,\mathrm{d}O = \int_F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}O \\
&= \frac{3}{\sqrt{3}} \int_F \mathrm{d}O = \frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$