Musterlösungen Serie 8

1. **Frage 1**

Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

Die Differenzialgleichung $\frac{x^2}{2}y'' - xy' + y = 0$

- ◯ besitzt die Funktion $y : x \to x$ als Lösung;
- ◯ besitzt die Funktion $y : x \to x^2$ als Lösung;
- ◯ besitzt unendlich viele Lösungen;
- √ ◯ besitzt genau zwei Lösungen.

Durch Einsetzen verifiziert man leicht, dass

$$y(x) = x \quad \text{und} \quad y(x) = x^2$$

die Differenzialgleichung lösen. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung besteht aus einem Schar von (unendlich vielen) Lösungskurven. Zu vorgegebenen Anfangsbedingungen würde nach Satz 8.1 (Stammbach, Analysis I/II, Kapitel VII.8) eine eindeutig bestimmte Lösung (aber nie genau zwei) geben.

Frage 2

Was ist die Ordnung einer Differenzialgleichung für eine Funktion y von x?

- ◯ Die höchste Potenz von y, die in der Gleichung auftritt.
- √ ◯ Die höchste Ableitung von y, die in der Gleichung auftritt.
- ◯ Der höchste Grad eines Polynoms in y und x, das in der Gleichung auftritt.

Bitte wenden!

Frage 3

Betrachten Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $x \mapsto y(x)$ im Punkt $(x, y(x))$. Wie lautet die Differenzialgleichung dafür, dass diese Tangente die x-Achse im vorgegebenen Abstand c vom Punkt $(x, 0)$ schneidet?

○ $x - \frac{y}{y'} = c$

○ $\frac{y}{y'} = c$

○ $yy' = c$

√ ○ $\left|\frac{y}{y'}\right| = c$

Die Tangente schneidet die x-Achse in dem Punkt $x - \frac{y}{y'}$. Sein Abstand von dem Punkt x ist der Absolutbetrag der Differenz, also ist (d) korrekt.

Frage 4

Welche Substitution macht die folgende Differenzialgleichung separierbar?

$$y' + \frac{y}{x} = xy^2$$

○ $y = ux$

√ ○ $y = u/x$

○ $y = 1/u$

○ $y = x/u$

Die Substitutionen führen in der gegebenen Reihenfolge zu den Gleichungen $u' + 2u/x = x^2u^2$, beziehungsweise $u' = u^2$, beziehungsweise $-u' + u/x = x$, beziehungsweise $-u' + 2u/x = x^2$. Von diesen ist nur die zweite separierbar, also lautet die richtige Antwort (b).

Frage 5

Wählen Sie die passende separierte Form für die Differenzialgleichung $y' = \log(x+1)y + \log(x+1)$.

√ ◯ $\frac{y'}{y+1} = \log(x+1)$.

Richtig. $y' = \log(x+1)y + \log(x+1) = (y+1)\log(x+1) \Rightarrow \frac{y'}{y+1} = \log(x+1)$.

◯ $\frac{y'}{y} = \log(x+1) + 1$.

◯ $yy' = \log(x+1)$.

Frage 6

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

◯ Jede separierbare Differenzialgleichung ist eine homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung.

◯ Jede separierbare Differenzialgleichung ist eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung.

◯ Jede lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

√ ◯ Jede homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

Eine homogene lineare Differenziagleichung 1. Ordnung hat die Form $y' = p(x)y$ und ist damit separierbar. Für alle anderen Aussagen lassen sich Gegenbeispiele finden. Richtig ist also (d).

Bitte wenden!

Frage 7

[Prüfung Winter 2013] Bestimmen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$ des Vektorfelds

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(e^{y^2} + e^{z^2},\;\; (2z+1)xe^{z^2} + (2x+1)ye^{y^2},\;\; xyze^{x^2+y^2}\right)$$

entlang des geschlossenen Wegs γ, bestehend aus den Seiten des Dreiecks mit Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$, im Gegeuhrzeigersinn.

√ ○ 1

○ -1

○ 2

1. 1. Möglichkeit ("mit Stokes"): Da

$$rot(\vec{v}) = (\cdots, \cdots, (2z+1)e^{z^2}),\;\; n = (0,0,1)$$

ist die Arbeit von $\vec{v}$ längst γ gleich die Fläche des Dreieks

$$A = \int_D dxdy = 1.$$

2. 2. Möglichkeit ("direkt"): Seien

$$\gamma_1(t) = (-t+1, t, 0),\;\; t \in [0,1]$$
$$-\gamma_2(t) = (t-1, t, 0),\;\; t \in [0,1]$$
$$\gamma_3(t) = (t, 0, 0),\;\; t \in [-1,1]$$

Parametrisierungen der Kanten des Weges. Die gesuchte Arbeit ist gleich

$$A = \int_\gamma v \cdot dr = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} v \cdot dr = \int_{\gamma_1-(-\gamma_2)+\gamma_3} v \cdot dr = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{t^2}+1 \\ (1-t)+(2(1-t)+1)te^{t^2} \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt +$$

$$-\int_0^1 \begin{pmatrix} e^{t^2}+1 \\ (t-1)+(2(t-1)+1)te^{t^2} \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 2 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 (-2e^{t^2} - 2 + 2(1-t) + 4(1-t)te^{t^2})dt + 4 =$$

$$= \int_0^1 e^{t^2}(-2+4t-4t^2)dt + 3 = -2\int_0^1 e^{t^2}(1-2t+2t^2)dt + 3 =$$

$$= -2[e^{t^2}(t-1)]_0^1 + 3 = -2 + 3 = 1.$$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 8

[Prüfung Winter 2013] Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ erfülle rot $\vec{v}(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Was folgt?

√ ○ Es gibt eine Funktion $f(x, y, z)$ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

○ Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kreisscheibe D in der xy-Ebene verschwindet.

Gegenbeispiel $\vec{v} = (0, 0, 1)$.

○ Der Fluss $\int_S v \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.

Gegenbeispiel $\vec{v} = (0, 0, z)$.

√ ○ Die Arbeit $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$ entlang jedes geschlossenen Wegs γ verschwindet.

2. Die Differenzialgleichung ist separierbar.

$$\left(x^2+3\right) y' + 2xy = x \Longleftrightarrow \left(x^2+3\right) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,(1-2y)$$
$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{1-2y} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+3} \Longrightarrow -\frac{1}{2} \ln|1-2y| = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+3\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$\Longleftrightarrow \ln|1-2y| = -\ln\left(x^2+3\right) - 2c \Longleftrightarrow |1-2y| = \frac{1}{x^2+3} \cdot e^{-2c}$$
$$\Longleftrightarrow 1-2y = \frac{K}{x^2+3} \text{ mit } K = \pm e^{-2c} \Longrightarrow y(x) = -\frac{K}{2\,(x^2+3)} + \frac{1}{2}$$

Mit $y(0) = 1$ folgt $K = -3$. Also ist

$$y(x) = \frac{3}{2\,(x^2+3)} + \frac{1}{2}.$$

3. Sei $v(t) = \dot{x}(t)$, dann lässt sich die DGL schreiben als

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v^2 + 1 \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}v}{1-v^2} = \int \mathrm{d}t.$$

Durch Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right| &= t + C_1 \\
\ln\left|\frac{v+1}{v-1}\right| &= 2t + 2C_1 \\
\frac{v+1}{v-1} &= Ke^{2t} \qquad \text{wobei } K = \pm e^{2C_1} \\
v\left(1 - Ke^{2t}\right) &= -1 - Ke^{2t}.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \dot{x}(t) = v(t) = \frac{Ke^{2t}+1}{Ke^{2t}-1}$$

Bitte wenden!

Aus $\dot{x}(0) = 0 = \frac{K+1}{K-1}$ folgt $K = -1$.

$$\lim_{x\to\infty} \dot{x}(t) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{2}{e^{2t}+1} = 1$$

Für $x \to \infty$ konvergiert somit die Geschwindigkeit gegen 1.

$$x(t) = \int \dot{x}\mathrm{d}t = \int \frac{e^{2t}+1-2}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t = \int 1 - \frac{2}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t =$$
$$= t - \int \frac{2}{e^{2t}(1+e^{-2t})}\mathrm{d}t = t + \int \frac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t = t + \ln\left(1+e^{-2t}\right) + C_2$$

Aus $x(0) = 0 = \ln(2) + C_2$ folgt $C_2 = -\ln(2)$ und damit ist die Lösung der DGL

$$x(t) = t + \ln\left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right).$$

4. Sei $y(t) = \dot{x}(t)$. Die Differenzialgleichung

$$\dot{y}(t) = -(1+y^2)$$

lässt sich durch Separation der Variablen lösen.

$$\frac{dy}{1+y^2} = -dt$$
$$\arctan(y) = -(t+C_1)$$
$$y = -\tan(t+C_1).$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \dot{x}(0) = 0$ liefert $C_1 = 0$. Aus $y(t) = -\tan(t)$ folgt

$$x(t) = \ln|\cos(t)| + C_2.$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $C_2 = 0$. Die Lösung $x(t) = \ln|\cos(t)|$ ist definiert für

$$-\pi/2 < t < \pi/2.$$