# Musterlösungen Serie 9

**1. Frage 1**

Gegeben ist eine lineare und homogene Differenzialgleichung, welche $y : x \to \sin x$ als Lösung besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ $x \to \cos x$ ist ebenfalls eine Lösung.

○ $x \to \sin(2x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

√ ○ $x \to 2\sin(x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

**Frage 2**

Finden Sie die Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

√ ○ $y(x) = \frac{1}{4}\left(3\,e^{-x} + e^{3x}\right)$.

○ $y(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{3x}$.

○ $y(x) = \frac{1}{4}\left(e^{-x} + 3e^{3x}\right)$.

Durch Einsetzen kriegen wir das Resultat. Sonst würden wir folgenderweise vorgehen. Die homogene Differenzialgleichung ist

$$y'' - 2y' - 3y = 0. \tag{1}$$

Mit dem Ansatz $y(x) = C\,e^{\lambda x}$ eingesetzt in (1) erhält man $(\lambda^2 - 2\lambda - 3)\,e^{\lambda x} = 0$ und damit das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0, \tag{2}$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Damit sind die Funktionen $C_1\,e^{-x}$ und $C_2\,e^{3x}$ Lösungen der homogenen Differenzialgleichung. Da es keine Funktion auf der rechten Seite gibt, ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{3x}. \tag{3}$$

Die Anfangsbedingungen setzen die spezielle Lösung fest. Dazu benötigen wir noch

$$y'(x) = -C_1\,e^{-x} + 3C_2\,e^{3x}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} 1 \\ y'(0) &= -C_1 + 3C_2 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}.$$

Die Lösung der Differenzialgleichung ist somit

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(3\,e^{-x} + e^{3x}\right).$$

**Siehe nächstes Blatt!**

**Frage 3**

Finden Sie die Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung

$$y'' + 2y = x^2,$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

√ ◯ $y(x) = \frac{1}{4}\,e^{i\sqrt{2}x} + \frac{1}{4}\,e^{-i\sqrt{2}x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\sqrt{2}x\right) + x^2 - 1\right).$

◯ $y(x) = C_1\,e^{i\sqrt{2}x} + C_2\,e^{-i\sqrt{2}x}.$

◯ $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.$

Durch Einsetzen kriegen wir das Resultat. Sonst würden wir folgenderweise vorgehen. Die homogene Differenzialgleichung ist

$$y'' + 2y = 0,$$

somit ist $\lambda^2 + 2 = 0$ das charakteristische Polynom. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = i\sqrt{2}$ und $\lambda_2 = -i\sqrt{2}$, und damit ist die Lösung der homogenen Differenzialgleichung

$$y_h(x) = C_1\,e^{i\sqrt{2}x} + C_2\,e^{-i\sqrt{2}x}.$$

Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Einsetzten in die Differenzialgleichung liefert

$$2A + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2,$$

und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = 1/2$, $B = 0$ und $C = -1/2$. Die allegemeine Lösung ist dann

$$y(x) = C_1\,e^{i\sqrt{2}x} + C_2\,e^{-i\sqrt{2}x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Die Anfangsbedingungen liefern

$$\begin{aligned} 0 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \\ 0 = y'(0) = i\sqrt{2}C_1 - i\sqrt{2}C_2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad C_1 - C_2 = 0, \end{aligned}$$

d.h. $C_1 = C_2 = 1/4$. Somit ist die Lösung der Differenzialgleichung

$$y(x) = \frac{1}{4}\,e^{i\sqrt{2}x} + \frac{1}{4}\,e^{-i\sqrt{2}x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\sqrt{2}x\right) + x^2 - 1\right).$$

**Bitte wenden!**

**Frage 4**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung

$$2y'' - y' - 6y = e^{3x}.$$

○ $y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x}$.

√ ○ $y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}$.

○ $y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}$.

Durch Einsetzen kriegen wir das Resultat. Sonst würden wir folgenderweise vorgehen. Wir betrachten zunächst die homogene Differenzialgleichung

$$2y'' - y' - 6y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$2\lambda^2 - \lambda - 6 = (2\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

und hat somit die beiden (reellen) Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Daher ist eine allgemeine Lösung $y_h$ der homogenen Differenzialgleichung gegeben durch

$$y_h(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Wir bestimmen nun eine partikuläre Lösung $y_p$ der inhomogenen Differenzialgleichung. Der Ansatz für $y_p$ hängt von der Inhomogenität ab. Wir machen den Ansatz $y_p(x) = \alpha e^{3x}$. Diesen Ansatz und dessen Ableitungen $y_p'(x) = 3\alpha e^{3x}$, $y_p''(x) = 9\alpha e^{3x}$ in die Differenzialgleichung einsetzen liefert

$$2 \cdot 9\alpha e^{3x} - 3\alpha e^{3x} - 6\alpha e^{3x} = e^{3x} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{9}.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

**Frage 5**

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = 3y + \cos(x).$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

◯ Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist gleich $y(x) = ke^{3x} + \cos x$, für $k \in \mathbb{R}$.

◯ Eine partikuläre Lösung der Differenzialgleichung ist gleich $y(x) = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$.

√ ◯ Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist gleich $y(x) = ke^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$, für $k \in \mathbb{R}$.

◯ Die allgemeine Lösung der homogene Differenzialgleichung ist gleich $y(x) = \pm e^C \cdot e^{3x}$, für $C \in \mathbb{R}$.

Die zugehörige homogene Differenzialgleichung lautet

$$y' = 3y.$$

Separieren liefert $y = 0$ oder

$$\begin{gathered}\int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx \\ \ln|y| = 3x + C,\ C \in \mathbb{R} \\ |y| = Ke^{3x},\ K = e^C \in \mathbb{R}_+^* \\ y = Ke^{3x},\ K \in \mathbb{R}^*.\end{gathered}$$

Also ist die allgemeine Lösung der homogene Differenzialgleichung gleich

$$y_h(x) = Ke^{3x},\ K \in \mathbb{R},$$

(da $y = 0$ die homogene Differenzialgleichung auch löst ist die Aussage $d$) falsch, da $\pm e^C \in \mathbb{R}^*$).
Als Ansatz für eine partikuläre Lösung von $y' = 3y + \cos(x)$ wählen[1] wir

$$y_0(x) = a\cos x + b\sin x,$$

wobei $a$ und $b$ zwei noch zu bestimmenden Konstanten sind. Einsetzen liefert

$$-a\sin x + b\cos x = 3(a\cos x + b\sin x) + \cos x$$

und also

$$\begin{cases} -a = 3b & (I) \\ b = 3a + 1 & (II). \end{cases}$$

Aus $(I)$ folgt $b = -\frac{a}{3}$. Einsetzen in $(II)$ liefert

$$-\frac{a}{3} = 3a + 1$$

und also $a = -\frac{3}{10}$ und $b = \frac{1}{10}$. Eine partikuläre Lösung der Differenzialgleichung ist also

$$y_0(x) = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x.$$

[1] Als Faustregel kann man sich merken, dass man immer einen Ansatz für $y_0$ versuchen soll, der die Form des Störgliedes $q(x)$ hat. Ist also $q(x)$ ein Polynom, so soll man ein Polynomansatz versuchen, ist $q(x)$ eine Sinus- oder Cosinusfunktion, so soll man als Ansatz eine Summe einer Sinus- oder Cosinusfunktion der gleichen Kreisfrequenz versuchen, usw. Nicht immer führt dies allerdings zum Ziel. Dann muss man das Verfahren von Lagrage angewandt werden.

**Bitte wenden!**

Man erhält die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung indem man an $y_0$ die allgemeine Lösung der homogenen Teil addiert, d.h.

$$y(x) = y_h(x) + y_0(x) = Ke^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Die Aussagen $a)$ und $b)$ sind falsch, da $y(x) = \cos x$ und $y(x) = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$ die Differenzialgleichung nicht lösen.

**Siehe nächstes Blatt!**

**Frage 6**

Suchen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = -2\frac{y}{x} + e^x.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist gleich...

√ ○ $y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^2}$, für $k \in \mathbb{R}$.

○ $y(x) = \frac{k}{x^2}$, für $k \in \mathbb{R}$.

○ $y(x) = \frac{k}{x^2} + e^x$, für $k \in \mathbb{R}$.

○ $y(x) = \frac{k+x^2-2x}{x^2}$, für $k \in \mathbb{R}$.

Die zugehörige homogene Differenzialgleichung lautet

$$y' = -2\frac{y}{x}.$$

Separieren liefert $y = 0$ oder

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int -\frac{2}{x}\,dx \\ \ln|y| &= -2\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} \\ |y| &= Kx^{-2},\ K = e^C \in \mathbb{R}_+^* \\ y &= Kx^{-2},\ K \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung der homogene Differenzialgleichung gleich

$$y_h(x) = Kx^{-2},\ K \in \mathbb{R},$$

(da $y = 0$ die homogene Differenzialgleichung auch löst).
Als Ansatz von Lagrange setzen wir

$$y_0(x) = \gamma(x) \cdot x^{-2}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma'(x) \cdot x^{-2} &= e^x \\ \gamma'(x) &= x^2 e^x. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\gamma(x) = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Da wir nur an einer partikulären Lösung interessiert sind, können wir hier auf die Integrationskonstante verzichtern.
Wir erhalten

$$y_0(x) = \gamma(x) \cdot x^{-2} = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^2}$$

und als allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_0(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^2},$$

für $k \in \mathbb{R}$.

**Bitte wenden!**

## Frage 7

Das Wachstum einer Taufliegen-Population unter Laborbedingungen kann näherungsweise durch die Differenzialgleichung

$$f'(t) = 0,0006 \cdot (350 - f(t)) \cdot f(t)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet $f(t)$ die Anzahl der Taufliegen zur Zeit $t$ in Tagen. Für welche Zahlen $a > 0$ ist die Funktion

$$f(t) = \frac{350}{a \cdot e^{-0,21t} + 1}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung?

- ◯ Für kein $a$.
- ◯ Nur für $a = 350 = \lim_{t\to\infty} f(t)$.
- ◯ Nur für $a = \ln(|-0,21|)$.
- ◯ Nur für $a = \ln\left(\frac{1}{|-0,21|}\right)$.
- √ ◯ Für jedes $a$.

1. *Methode:* Wir berechnen zunächst die Ableitung der angegebenen Funktion.
Zum Beispiel mit Hilfe der Quotientenregel folgt

$$f'(t) = \frac{350 \cdot 0,21 \cdot a \cdot e^{-0,21\cdot t}}{(ae^{-0,21\cdot t} + 1)^2} = \frac{73,5 \cdot a \cdot e^{-0,21\cdot t}}{(ae^{-0,21\cdot t} + 1)^2}.$$

Jetzt setzen wir die angegebene Funktion in die rechte Seite der DGL ein und erhalten

$$0,0006 \cdot \left(350 - \frac{350}{ae^{-0,21\cdot t} + 1}\right) \cdot \frac{350}{ae^{-0,21\cdot t} + 1} = \frac{73,5 \cdot a \cdot e^{-0,21\cdot t}}{(ae^{-0,21\cdot t} + 1)^2} = f'(t).$$

Also ist die angegebene Funktion für jedes $a > 0$ eine Lösung der DGL.
2. *Methode:* Wir lösen die Differenzialgleichung.
Setzen wir $b = 0,0006$, $c = 350$ und $f(t) = y(t)$. Die DGL

$$y' = b \cdot (c - y) \cdot y$$

ist separabel, und wir erhalten

$$\int \frac{dy}{(c - y)y} = \int b\,dt.$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung ein und suchen $A$ und $B$, sodass

$$\frac{1}{(c - y)y} = \frac{A}{c - y} + \frac{B}{y} = \frac{Ay + B(c - y)}{(c - y)y},$$

also so, dass

$$1 = (A - B)y + Bc,$$

oder auch so, dass

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ Bc = 1, \end{cases}$$

d.h. $A = B = \frac{1}{c}$ und $\frac{1}{(c-y)y} = \frac{1/c}{c-y} + \frac{1/c}{y}$. Eine Integration liefert

$$\int \frac{dy}{(c - y)y} = \int (\frac{1/c}{c - y} + \frac{1/c}{y})dy = \frac{1}{c}(-\ln|c - y| + \ln|y|) = \frac{1}{c}\ln|\frac{y}{c - y}| = \int b\,dt = bt + D,\ \ D \in \mathbb{R}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{y}{c-y}\right| &= cbt + cD,\ \ D\in\mathbb{R}\\
\frac{y}{c-y} &= Ke^{bct},\ \ K=\pm e^{cD}\in\mathbb{R}^*\\
y &= (c-y)Ke^{bct}\\
y(1+Ke^{bct}) &= cKe^{bct}\\
y(t) = \frac{cKe^{bct}}{1+Ke^{bct}} &= \frac{c}{\frac{1}{K}e^{-bct}+1} = \frac{350}{ae^{-0{,}21t}+1},\ \ a=1/K\in\mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

Die Zahl $a$ darf aber in $\mathbb{R}_+^*$ liegen, sodass die Population $y(t)$ natürlich immer positiv bleibt.

**2.** Da $y_1 : x \longmapsto e^x$ eine Lösung von $\left(2x-x^2\right)y''+\left(x^2-2\right)y'+2\left(1-x\right)y=0$ und $y_1''(x)=y_1'(x)=y_1(x)=e^x$ ist, gilt

$$\left(2x-x^2\right)e^x+\left(x^2-2\right)e^x+2\left(1-x\right)e^x=0. \tag{4}$$

Für $y(x)=z(x)\,e^x$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
y'(x) &= z'(x)\,e^x+z(x)\,e^x\\
y''(x) &= z''(x)\,e^x+2z'(x)\,e^x+z(x)\,e^x.
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differenzialgleichung ergibt dies

$$\begin{aligned}
0 &= \left(2x-x^2\right)\left(z''e^x+2z'e^x+ze^x\right)+\left(x^2-2\right)\left(z'e^x+ze^x\right)+2\left(1-x\right)ze^x\\
&= z\Big[\underbrace{\left(2x-x^2\right)e^x+\left(x^2-2\right)e^x+2\left(1-x\right)e^x}_{\overset{(4)}{=}0}\Big]\\
&\quad+\left(2x-x^2\right)\left(z''e^x+2z'e^x\right)+\left(x^2-2\right)z'e^x\\
&= e^x\left[\left(2x-x^2\right)z''+\left(2x-x^2\right)2z'+\left(x^2-2\right)z'\right]\\
&= e^x\left[\left(2x-x^2\right)z''+\left(4x-x^2-2\right)z'\right].
\end{aligned}$$

Da $e^x\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, gilt

$$\begin{aligned}
&\left(2x-x^2\right)z''(x)+\left(4x-x^2-2\right)z'(x)=0\\
\iff\ &\frac{z''(x)}{z'(x)}=\frac{x^2-4x+2}{2x-x^2}=\frac{x^2-2x+2x-4x+2}{2x-x^2}=-1+\frac{2-2x}{2x-x^2}.
\end{aligned}$$

Integration liefert

$$\ln|z'(x)|=-x+\ln\left|2x-x^2\right|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}\Longrightarrow z'(x)=c_1e^{-x}\left(2x-x^2\right),\quad c_1=\pm e^c.$$

Eine weitere Integration liefert

$$\begin{aligned}
z(x) &= c_1\int\underbrace{e^{-x}}_{\uparrow}\underbrace{\left(2x-x^2\right)}_{\downarrow}\mathrm{d}x = c_1\left[-e^{-x}\left(2x-x^2\right)+\int e^{-x}\left(2-2x\right)\mathrm{d}x\right]\\
&= c_1\left[-2xe^{-x}+x^2e^{-x}+2\int e^{-x}\mathrm{d}x-2\int\underbrace{e^{-x}}_{\uparrow}\underbrace{x}_{\downarrow}\mathrm{d}x\right]\\
&= c_1\Big[-2xe^{-x}+x^2e^{-x}-2e^{-x}-2\big(-e^{-x}x+\underbrace{\int e^{-x}\mathrm{d}x}_{-e^{-x}+K}\big)\Big]\\
&= c_1\left[-2xe^{-x}+x^2e^{-x}-2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}-2K\right]\\
&= c_1x^2e^{-x}\underbrace{-2c_1K}_{=:c_2}=c_1x^2e^{-x}+c_2,
\end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

wobei $K \in \mathbb{R}$.
Die allgemeine Lösung von $\left(2x - x^2\right) y'' + \left(x^2 - 2\right) y' + 2\,(1-x)\,y = 0$ ist somit

$$y(x) = z(x)e^x = \left(c_1 x^2 e^{-x} + c_2\right) e^x = c_1 x^2 + c_2 e^x.$$

**3.** Durch totale Ableitung nach $x$ der Schargleichung der Kreise

$$x^2 + y^2 - 2Cy = 0$$

kriegen wir

$$2x + 2yy' - 2Cy' = 0.$$

Durch Elimination von $C$ aus den zwei letzten Gleichungen kriegen wir die Differentialgleichung

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien lautet also als

$$y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy},$$

die als

$$y' = \frac{1}{2}(\frac{y}{x} - \frac{x}{y})$$

umgeschrieben sein darf. Mit der Substitution

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

kriegen wir

$$y'(x) = (u(x) \cdot x)' = u'(x)x + u(x)$$

und Einsetzen in der Differentialgleichung liefert die separierbare Gleichung

$$xu' = -\frac{1}{2}(\frac{u^2+1}{u}).$$

Durch Separation kriegen wir

$$\int \frac{2u}{u^2+1} du = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|u^2+1| = -\ln|x| + C$$

Nach Einsetzen von $A = \pm e^C$ und Rücksubstitution folgt

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{A}{x}$$

$$x^2 - Ax + y^2 = 0.$$

Die Orthogonaltrajektorien sind also wiederum Kreise, welche die $y$-Achse im Ursprung berühren (Figur: s. Stammbach, Analysis, Teil C, Kap. VII.6, Seite 55).

**Siehe nächstes Blatt!**

**4.** Die Schar

$$y(x) = C_1 \cos(C_3 x) + C_2 \sin(C_3 x) \quad (1)$$

entsprich harmonische Schwingungen zu beliebigen Kreisfrequenzen (s. Stammbach, Analysis, Teil C, Kap. VII.6, Seite $67$). Da wir 3 Parametern haben, wird die zugehörige Differentialgleichung dritter Ordnung sein. Durch Ableitung nach $x$ kriegen wir

$$y' = -C_1 C_3 \sin(C_3 x) + C_2 C_3 \cos(C_3 x) \quad (2)$$

$$y'' = -C_1 C_3^2 \cos(C_3 x) - C_2 C_3^2 \sin(C_3 x) \quad (3)$$

$$y''' = C_1 C_3^3 \sin(C_3 x) - C_2 C_3^3 \cos(C_3 x) \quad (4).$$

Aus den Gleichungen $(1), (2), (3), (4)$ sind nun die Parametern $C_1, C_2, C_3$ zu eliminieren. Division von $(4)$ durch $(2)$ liefert

$$\frac{y'''}{y'} = -C_3^2.$$

Ferner ergibt sich aus $(1)$ und $(3)$ die Gleichung

$$y'' + C_3^2 y = 0.$$

Als Differentialgleichung der Schar erhalten wir somit

$$y' y'' - y''' y = 0.$$