Prüfung

WICHTIG:

- Die Prüfung dauert **4 Stunden (240 Minuten)**.
- Verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe ein neues Blatt** und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer.
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex.
- Jede Aufgabe (ausser die Aufgabe 1) gibt gleich viele Punkte. Verweilen Sie deshalb nicht allzu lange bei einer Aufgabe, welche Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- **Sämtliche Resultate (ausser bei Aufgabe 1) müssen begründet werden, insbesondere müssen die Lösungswege ersichtlich sein.**

Zugelassene Hilfsmittel

- Eine entweder handgeschriebene oder mit dem Computer selbst erzeugte Zusammenfassung von maximal 5 A4 Blättern (Schriftgrösse $\geq$ 12pt).
- Eine Formelsammlung. Zur Auswahl stehen:
  - DMK/DPK/DCK: Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik-Physik-Chemie, Orell Füssli.
  - DMK/DPK: Formeln und Tafeln. Mathematik-Physik, Orell Füssli.
  - Commissions romandes de mathématique, physique et chimie: Formulaires et Tables, Edition du Tricorne.
- Keine weitere Bücher, kein Taschenrechner und keine Mobiltelefone sind erlaubt.

Bitte wenden!

Einige Formeln (die Sie nicht zu beweisen brauchen):

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C \\
\int \sin^2(x)dx &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C \\
\int \sqrt{a^2 - x^2}dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \\
\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx &= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \\
\int \sqrt{a^2 + x^2}dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx &= \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

1. **Multiple Choice Aufgabe. (**10 **Punkte)** Kreuzen Sie W oder F an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage wahr oder falsch ist. Begründungen sind nicht verlangt. Eine Frage wird mit 2 Punkten bewertet, wenn alle vier zugehörigen Aussagen korrekt angekreuzt werden, sonst mit 0 Punkten.

   a) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(x-1)^n$

   W ☐ F ☐ konvergiert nur für $x = 1$.

   W ☐ F ☐ konvergiert für $x = 2$.

   W ☐ F ☐ konvergiert für $-1 < x < 1$.

   W ☐ F ☐ definiert eine Funktion auf dem offenen Intervall $(0, 2)$.

   b) Die Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ auf $\mathbb{R}^2$

   W ☐ F ☐ hat unendlich viele kritische Punkte (d.h. Punkte (x, y) mit $\text{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

   W ☐ F ☐ hat keine absoluten Maximalstellen.

   W ☐ F ☐ hat keine absoluten Minimalstellen.

   W ☐ F ☐ hat Kreise als Niveaulinien.

   c) Die Differenzialgleichung $y''(x) + e^{x^2} y(x) = 0$

   W ☐ F ☐ hat keine Lösung, die für alle x definiert ist.

   W ☐ F ☐ hat unendlich viele Lösungen, die $y(0) = 4$ erfüllen.

   W ☐ F ☐ hat einen zweidimensionalen Lösungsraum.

   W ☐ F ☐ hat genau eine Lösung, die $y(3) = y'(3) = 3$ erfüllt.

   Hinweis: Sie brauchen die Differenzialgleichung **nicht** *zu lösen.*

   d) Ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ definiert auf $\mathbb{R}^3$ erfülle $\text{div}(\vec{v}) = 0$. Was folgt?

   W ☐ F ☐ Es gibt eine Funktion $f(x, y, z)$ mit $\vec{v} = \text{grad}\, f$.

   W ☐ F ☐ Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kreisscheibe D in der xy-Ebene verschwindet.

   W ☐ F ☐ Der Fluss $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.

   W ☐ F ☐ Die Arbeit $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$ entlang jedem geschlossenen Weg γ verschwindet.

   e) Die Lösung $x = x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt} = e^x$$
$$x(0) = 0$$

   W ☐ F ☐ ist monoton wachsend.

   W ☐ F ☐ ist nicht für alle $t \geq 0$ definiert.

   W ☐ F ☐ erfüllt $x(\frac{1}{2}) = \ln(2)$.

   W ☐ F ☐ erfüllt $x(t) = 0$ für alle t.

Bitte wenden!

2. **(6 Punkte)** Finden Sie alle reellwertigen Lösungen $y(x)$ der Differenzialgleichung

$$y'' + y' + y - x^2 - x - 1 = 0.$$

3. **(6 Punkte)** Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y, z) = (-y + x^2 z, 2x + z^3 + y^2, x)$$

entlang der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ in der xy-Ebene im Gegenuhrzeigersinn.

4. **(6 Punkte)** Finden Sie für die Funktion

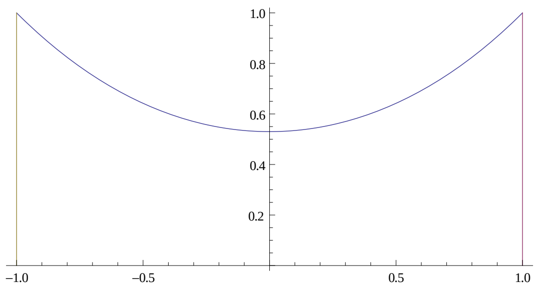
$$f(x) = \int_1^x \cos(\pi t^2) dt$$

das Taylorpolynom dritten Grades in $x_0 = 1$.

5. **(6 Punkte)** Der Graph einer Funktion der Form

$$x \mapsto a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + b, \qquad a, b, x_0 \in \mathbb{R}, a > 0,$$

heisst Kettenkurve ($\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$). Eine solche Kurve beschreibt ein Seil, das an den Enden in zwei Punkten befestigt ist und unter dem Einfluss der Schwerkraft hängt. Die Enden des Seils seien an den Punkten $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ aufgehängt, und die Steigung in $(1, 1)$ sei 1. Wie lang ist das Seil?

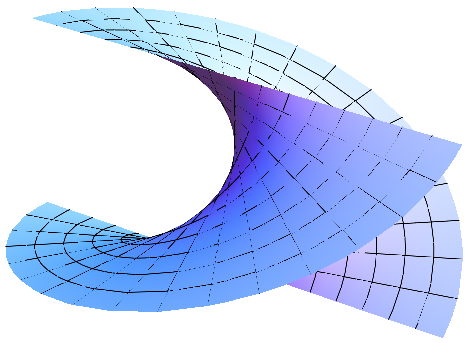


Siehe nächstes Blatt!

6. **(6 Punkte)** Eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ wird wie folgt definiert: Für jedes $h \in \mathbb{R}$ ist der Schnitt mit der horizontalen Ebene $z = h$ eine Gerade, die durch die z-Achse geht und einen Winkel $\frac{h}{L}$ mit der xz-Ebene einschliesst ($L > 0$ ist ein Parameter).

   a) Finden Sie eine Parameterdarstellung dieser Fläche.

   b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Teils dieser Fläche, der im Zylinder $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq \pi L$ liegt, in Abhängigkeit von $a > 0, L > 0$ (Siehe Abbildung).



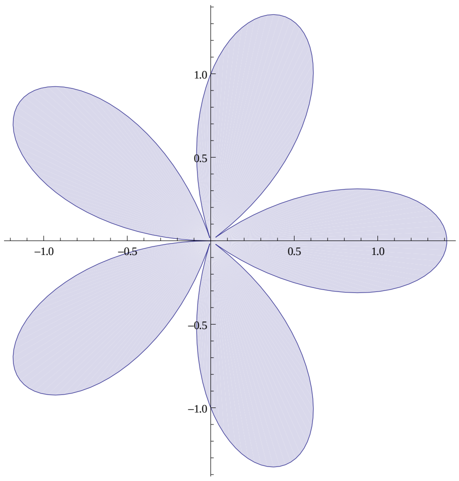
7. **(6 Punkte)** Bestimmen Sie die Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &y' = y\tan(x) - y^2\cos(x), \quad -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2} \\ &y(0) = 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $u(x) = y(x)\cos(x)$.

Bitte wenden!

8. **(6 Punkte)** Berechnen Sie den Flächeninhalt $F = \int_S dF$ und das polare Trägheitsmoment $J_0 = \int_S (x^2 + y^2) dF$ der durch die Ungleichung $\varrho^2 \leq 1 + \cos(5\varphi)$ in Polarkoordinaten (ϱ, φ) definierten Fläche S.



9. **(6 Punkte)** Bestimmen Sie den Maximalwert von $y(t)$ der Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t)x(t) \\ \dot{y}(t) = (1 - x(t))y(t) \\ x(0) = 1/2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

10. **(6 Punkte)** Die Rotation des Graphen der Funktion

$$x \mapsto y = \sqrt{1 - |x|}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

um die x-Achse definiert einen Rotationskörper K. Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ_z von K bezüglich der z-Achse für eine konstante Dichte d.

Viel Erfolg!