D-MAVT & D-MATL | Analysis I & II | Winter 2013
Prof. Dr. Giovanni Felder

Prüfung

Wichtig:

- Die Prüfung dauert **4 Stunden (240 Minuten)**.
- Verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe ein neues Blatt** und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer.
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex.
- Jede Aufgabe (ausser die Aufgabe 1) gibt gleich viele Punkte. Verweilen Sie deshalb nicht allzu lange bei einer Aufgabe, welche Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- **Sämtliche Resultate (ausser bei Aufgabe 1) müssen begründet werden, insbesondere müssen die Lösungswege ersichtlich sein.**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Eine entweder handgeschriebene oder mit dem Computer selbst erzeugte Zusammenfassung von maximal 5 A4 Blättern (Schriftgrösse $\geq$ 12pt).
- Eine Formelsammlung. Zur Auswahl stehen:
  - DMK/DPK/DCK: Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik-Physik-Chemie, Orell Füssli.
  - DMK/DPK: Formeln und Tafeln. Mathematik-Physik, Orell Füssli.
  - Commissions romandes de mathématique, physique et chimie: Formulaires et Tables, Edition du Tricorne.
- Keine weitere Bücher, kein Taschenrechner und keine Mobiltelefone sind erlaubt.

Einige Formeln (die Sie nicht zu beweisen brauchen):

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C \\
\int \sin^2(x)dx &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C \\
\int x^2\cos(ax)dx &= a^{-3}((a^2x^2-2)\sin(ax) + 2ax\cos(ax)) + C \\
\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \\
\int \frac{1}{a^2+x^2}dx &= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \\
\int \sqrt{a^2+x^2}dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx &= \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

1. **Multiple Choice Aufgabe. (**10 **Punkte)** Kreuzen Sie W oder F an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage wahr oder falsch ist. Begründungen sind nicht verlangt. Eine Frage wird mit 2 Punkten bewertet, wenn alle vier zugehörigen Aussagen korrekt angekreuzt werden, sonst mit 0 Punkten.

   (a) Die Taylorreihe von $x \mapsto \sin(x)$ um $x = \pi$

   W ☐ F ☐ hat Konvergenzradius π.

   W ☐ F ☐ ist $-(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 + \cdots$

   W ☐ F ☐ ist $-(x-\pi) - \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 - \cdots$

   W ☐ F ☐ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Der kritische Punkt $(0,0)$ der Funktion $f\colon (x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$, auf $\mathbb{R}^2$

   W ☐ F ☐ ist eine lokale Minimalstelle.

   W ☐ F ☐ hat positiv definite Hesse-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{smallmatrix}\right)$.

   W ☐ F ☐ ist weder eine lokale Minimalstelle noch eine lokale Maximalstelle.

   W ☐ F ☐ liegt auf dem Schnittpunkt von zwei Geraden, auf welchen f einen konstanten Wert annimmt.

   (c) Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{2+x^a}\,dx$

   W ☐ F ☐ konvergiert für alle $a > 1$.

   W ☐ F ☐ divergiert für $a = 1$.

   W ☐ F ☐ konvergiert für alle a mit $0 < a < 1$.

   W ☐ F ☐ konvergiert für alle $a > 1$ und für alle $a < 0$.

   (d) Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ erfülle $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Was folgt?

   W ☐ F ☐ Es gibt eine Funktion $f(x,y,z)$ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

   W ☐ F ☐ Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n}\,dF$ durch jede Kreisscheibe D in der xy-Ebene verschwindet.

   W ☐ F ☐ Der Fluss $\int_S v \cdot \vec{n}\,dF$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.

   W ☐ F ☐ Die Arbeit $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$ entlang jedes geschlossenen Wegs γ verschwindet.

(e) Das System

$$\dot{x} = x^2 + y^2$$
$$\dot{y} = x + y$$

W ☐ F ☐ hat unendlich viele Gleichgewichtspunkte.

W ☐ F ☐ hat unendlich viele Lösungen, die die Anfangsbedingung $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ erfüllen.

W ☐ F ☐ hat genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung $x(1) = 0, y(1) = 0$ erfüllt.

W ☐ F ☐ hat endlich viele Lösungen.

Hinweis: Sie brauchen das System *nicht* zu lösen.

2. **(6 Punkte)** Finden Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 = -1$$
$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0,$$

und bestimmen Sie das maximale Intervall, das 0 enthält und auf welchem die Lösung $x(t)$ definiert ist.

3. **(6 Punkte)** Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{y}(t) & = x(t) \\ \dot{x}(t) + \dot{y}(t) & = y(t). \end{cases}$$

4. **(6 Punkte)** Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$\vec{v} = (xyz,\ y\sin(xz),\ x^3 + y^3 + z^3)$$

durch die Oberfläche des Würfels

$$W = \{(x, y, z) \,|\, -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

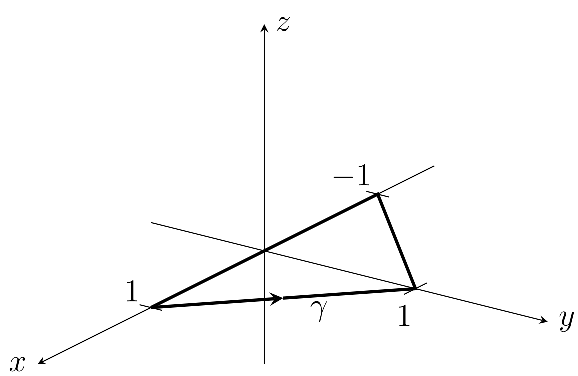
von innen nach aussen.

5. **(6 Punkte)**

   (a) Finden Sie die Lösungen $t \mapsto x(t)$, $t > 0$, der Differenzialgleichung
   $$t^2\ddot{x}(t) - x(t) = t^3,$$
   welche die Bedingung
   $$\lim_{t\to 0} x(t) = 0$$
   erfüllen.

   (b) Bestimmen Sie die Lösungen aus (a), die die zusätzliche Bedingung $x(1) = 1$ erfüllen.

6. **(6 Punkte)** Bestimmen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$ des Vektorfelds
   $$\vec{v}(x,y,z) = \left(e^{y^2} + e^{z^2},\;\; (2z+1)xe^{z^2} + (2x+1)ye^{y^2},\;\; xyze^{x^2+y^2}\right)$$
   entlang des in der Zeichnung abgebildeten, bestehend aus den Seiten des Dreiecks mit Eckpunkten $(1,0,0), (0,1,0), (-1,0,0)$, geschlossenen Wegs γ.

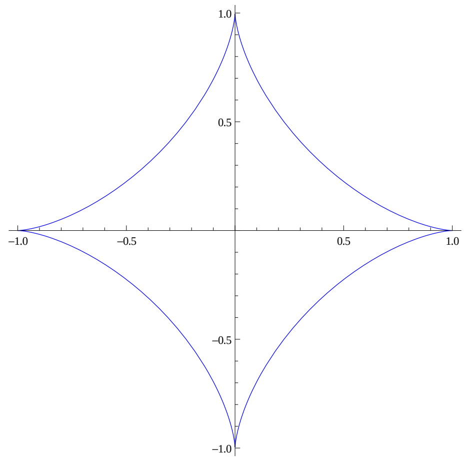


7. **(6 Punkte)** *(Approximation der Kosinusfunktion im quadratischen Mittel).* Sei f die Funktion $x \mapsto f(x) = a + bx^2$ mit reellen Parametern a und b. Bestimmen Sie a und b so, dass das Integral
   $$\int_{-1}^{1} \left(f(x) - \cos(\pi x)\right)^2 dx$$
   minimal wird. Begründen Sie warum das Integral für diese Werte tatsächlich minimal ist.

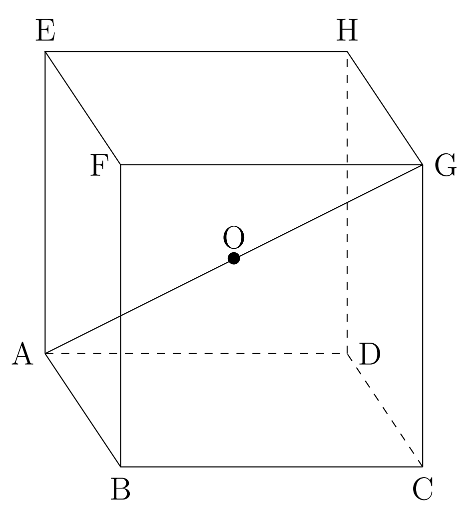
8. **(6 Punkte)** Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Rotationsfläche, die durch Drehen der abgebildeten Kurve

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

um die x-Achse um 180° entsteht.



9. **(6 Punkte)** Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Würfels $ABCDEFGH$ der Kantenlänge 2 bezüglich der abgebildeten Diagonale AG.
Die Dichte ρ sei konstant.



Hinweis: Wählen Sie den Mittelpunkt des Würfels als Ursprung des Koordinatensystems.

10. **(6 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Länge $L(t)$ des Graphen

$$\Gamma = \{(x, y) \,|\, y = \ln(x),\ t \leq x \leq 1\}$$

des natürlichen Logarithmus im Intervall $[t, 1]$ für $0 < t < 1$.

(b) Bestimmen Sie den Koeffizient a_0 in der Entwicklung

$$L(t) = \ln(\frac{1}{t}) + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Viel Erfolg!