Schnellübung 1

1. Bestimmen Sie die globale Maximalstelle der Funktion

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x - 10y + 2$$

auf dem Quadrat mit den Eckpunkten $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,2)$, $D = (0,2)$.

2. Betrachten Sie die Funktionen $\varphi, \psi, \chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(x,y,z) = 3x^2 + 3y - 1,$$
$$\psi(x,y,z) = z^2 + 3x,$$
$$\chi(x,y,z) = 2yz + 1.$$

Bestimmen Sie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) &= \varphi(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) &= \psi(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) &= \chi(x,y,z) \end{cases}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ erfüllt ist. Ist f eindeutig bestimmt?

3. Berechnen Sie die **Richtungsableitung** der Funktion $f(x,y,z) = x^2yz^3$ in der Richtung der Tangente der Kurve $\gamma : t \mapsto (e^{-2t}, 2\sin t + 1, t - \cos t)$ im Punkt $(1,1,-1)$.

4. Aus einer Funktion *einer* Variablen $f : r \mapsto f(r)$ entsteht durch Einsetzen von $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die Funktion von drei Variablen

$$\tilde{f} : (x,y,z) \longmapsto f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\textbf{grad}\, \tilde{f} = \frac{f'(r)}{r} \cdot \vec{r}\,, \quad \text{wobei } \vec{r} = (x,y,z)\,.$$

b) Bestimmen Sie $f(r)$ so, dass

$$\textbf{grad}\, \tilde{f} = \frac{\vec{r}}{r^5} \quad \text{und} \quad f(1) = 0\,.$$