D-MAVT D-MATL | Analysis II | FS 2013

Prof. Dr. P. Biran

Schnellübung 2

1. Es seien ϕ und ψ gegebene Funktionen einer Variablen. Hieraus wird die Funktion

$$g(x,y) := \phi\big(x+\psi(y)\big)$$

gebildet. Zeigen Sie : Für jede Wahl von ϕ und ψ gilt $g_x \cdot g_{xy} = g_y \cdot g_{xx}$.

2. Es seien α und β positive Zahlen und B die „obere Hälfte" der Einheitskugel. Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_B z^\alpha (x^2+y^2+z^2)^{\beta/2}\, dV.$$

Hinweis : Kugelkoordinaten.

3. [Prüfungsaufgabe He 1990]

a) Wo befindet sich der höchste Punkt der durch

$$z = xye^{-(x+y)} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

gegebenen Fläche?

b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$B = \{(x,y,z) \;\mid\; 0 \leq z \leq xye^{-(x+y)},\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

4. Sei $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld. Die Divergenz $\operatorname{div}\ \vec{v}$ ist definiert als

$$\operatorname{div}\ \vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z) = \nabla \cdot \vec{v}(x,y,z)$$

und die Rotation $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z)$ als

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{v}(x,y,z),$$

wobei $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ der Nabla Operator bezeichnet.

Bitte wenden!

i) Zeigen Sie: $\text{div}\ (\text{rot}\ \vec{v}) = 0$

ii) Zeigen Sie: Ist f eine Funktion, so ist

$$\text{div}\ (grad\ f) = \Delta f,$$

wobei $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ der Laplace von f ist.

iii) Zeigen Sie, dass

$$\text{rot}\ \text{rot}\ \vec{v} = grad\ \text{div}\ \vec{v} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}.$$