Serie 1

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die Online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zur Online MC-Fragen bis **Freitag, den 08.03.2013 um 14.00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 07.03.2013 oder Freitag, den 08.03.2013 während der Übungsstunde.
Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2_mavt_matl/

---

1. **Frage 1**

   Wie lautet der Gradient der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2y + y$?

   ○ $\nabla f(x, y) = x^2 + 2xy + 1.$

   ○ $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 1 \end{pmatrix}$

   ○ $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$

   Frage 2

   Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   ○ Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

   ○ Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 3, 1)$.

   ○ Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

Frage 3

Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

- ◯ der minimalen partiellen Ableitung.
- ◯ entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.
- ◯ des Gradienten.
- ◯ entgegengesetzt zum Gradienten.
- ◯ orthogonal zum Gradienten.

Frage 4

Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y + z^3$ an der Stelle $(1, 2, 2)$ in Richtung des Vektors $(4, 4, 2)$.

- ◯ $\dfrac{34}{3}$
- ◯ 36
- ◯ 6
- ◯ $(2, 1, 12)$
- ◯ $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 4)$

Frage 5

Für je zwei partiell differenzierbare Funktionen $f,\ g :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt

- ◯ $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g.$
- ◯ $\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g.$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 6

Der Zustand eines Gases wird durch die Grössen Druck p, Volumen V und (absolute) Temperatur T beschrieben, welche unterreinander durch eine Zustandsgleichung des Gases

$$F(p, V, T) = 0$$

verbunden sind.[1] Die Zustandgleichung sagt, dass für eine feste Menge von Gas je zwei der drei Grössen p, V, T die dritte festlegen. Man hat folglich Funktionen

$$\begin{aligned} p &: (V, T) \to p(V, T) \\ V &: (p, T) \to V(p, T) \\ T &: (p, V) \to T(p, V), \end{aligned}$$

welche aus der Zustandgleichung folgen. In der Physik definiert man dann den Ausdehnungskoeffizient α des Gases durch

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T},$$

den Spannungskoeffizient β durch

$$\beta = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial T},$$

und die Kompressibilitäts $\varkappa$ durch

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}.$$

Eine (nicht von der Zustandsgleichung abhängige) Beziehung zwischen den Koeffizienten $\alpha, \beta, \varkappa$ ist gegeben durch

- ◯ $\alpha\beta = T\varkappa$
- ◯ $\alpha = -p\varkappa\beta$
- ◯ $\alpha = p\varkappa\beta$

2. Bestimmen Sie jene Tangentialebenen an das Ellipsoid

$$2x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1,$$

welche parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ sind.

3. Sei f eine *beliebige* differenzierbare Funktion einer Variablen. Zeigen Sie, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$$

durch den Punkt $(0, 0, 0)$ gehen.

---

[1] Es gibt verschiedene Zustandglaichungen. Die einfachste ist die des idealen Gases

$$pV = RT,$$

wobei R eine Gaskonstante ist (also $F(p, V, T) = pV - RT$). In komplizierteren Fälle ist die van der Waal'sche Zustandgleichung

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT,$$

für Gaskonstanten a, b, die das Verhalten realer Gase genauer beschreibt (also $F(p, V, T) = (p + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT$).

Bitte wenden!

4. Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion

$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + 4\,x + 2\,y$$

auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 9$.