Online Zwischentest - Serie 10

Willkommen zum 2. Online-Test, welcher die Serie 10 ersetzt. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen bis **Freitag, den 17.05.2013 um 14:00 Uhr** ab.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. **Viel Erfolg**!

Frage 1

[Prüfungsaufgabe Frühling 2011)] Sei das Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\right)$$

und der Bereich $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq x^2 \text{ und } 0 \leq z \leq 1-y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ (von innen nach aussen) durch ∂B.

- ◯ $\frac{16}{21}$
- ◯ $-\frac{16}{21}$
- ◯ $\frac{3}{4}$
- ◯ $-\frac{3}{4}$

Frage 2

[Prüfungsaufgabe Frühling 2011] Gegeben sei das Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = (y,z,x)$$

und der Weg γ als Schnittkurve der beiden Flächen $x^2+y^2+z^2 = R^2$ mit $R \in \mathbb{R}$ und $x+y+z=1$. Wie gross ist der Absolutbetrag der Arbeit A des Vektorfeldes $\vec{v}$ längs des Weges γ in Abhängigkeit von R.

- ◯

$$|A| = \begin{cases} \left(R^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi & \text{falls } R \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ 0 & \text{falls } 0 \leq R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

- ◯

$$|A| = \begin{cases} \sqrt{3}\left(R^2 - \frac{1}{3}\right)\pi & \text{falls } R \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ 0 & \text{falls } 0 \leq R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Frage 3

Klicken Sie die **richtige** Antwort an:

Die Differenzialgleichung $s(x,y) = t(x,y) \cdot y'$ ist exakt, falls

- ◯ $s_y(x,y) \equiv t_x(x,y)$.
- ◯ $s_x(x,y) \equiv t_y(x,y)$.
- ◯ $s_y(x,y) \equiv -t_x(x,y)$.
- ◯ $s_x(x,y) \equiv -t_y(x,y)$.
- ◯ $s_x(x,y) \equiv -\frac{1}{t_y(x,y)}$.

Frage 4

Welche der folgenden Differenzialgleichungen ist linear?

- ◯ $(y'-2)^2 = y$
- ◯ $y'' + \dfrac{y'}{1-x^2} + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{x^2}$
- ◯ $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$
- ◯ $y'' + y' + y^2 = 0$
- ◯ $y = xy' + (y')^2$

Frage 5

Wie lautet die charakteristische Gleichung der DGL $y''' + 2y' + y = 0$?

- ◯ $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$
- ◯ $\lambda^3 + 2\lambda = 0$
- ◯ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
- ◯ $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$

Frage 6

Gegeben ist die Differenzialgleichung $y'' - 2y' + y = 0$. Welche ist die allgemeine Lösung?

- ◯ $y(x) = e^x + e^{-x} + C_0$
- ◯ $y(x) = e^x + xe^x + C_0$
- ◯ $y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3$
- ◯ $y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x$
- ◯ $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Frage 7

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y''' + y' = 0$ ist gleich...

- ◯ $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
- ◯ $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3$
- ◯ $y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3$
- ◯ $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- ◯ $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3$

Frage 8

Gegeben sei eine inhomogene lineare Differenzialgleichung mit Störglied $q(x)$, also z. B. $y'' + x^2 y' + (\sin x)y = q(x)$. Es sei $y_0 : x \to y_0(x)$ eine Lösung. Kann daraus in einfacher Weise eine Lösung der Differenzialgleichung $y'' + x^2 y' + (\sin x)y = 3q(x)$ konstruiert werden? Und, falls ja, wie?

- ◯ Nein. Dies ist nicht in einfacher Weise möglich.
- ◯ Ja, die Funktion $x \to (y_0(x))^3$ ist eine Lösung.
- ◯ Ja, die Funktion $x \to 3y_0(x)$ ist eine Lösung.
- ◯ Ja, die Funktion $x \to 3xy_0(x)$ ist eine Lösung.

Frage 9

Welche der folgenden Aussagen über die Differenzialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist falsch?

- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.
- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.
- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.
- ◯ Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to \infty$.
- ◯ Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to -\infty$.

Frage 10

Welche der folgenden Aussagen über die Differenzialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist falsch?

- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.
- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.
- ◯ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Frage 11

Welche der folgenden Aussagen über lineare DGLn 2. Ordnung sind korrekt?

- ◯ Die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + y = 0$ ist $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$.
- ◯ Die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + y = 0$ ist $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-x}$.
- ◯ Die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$ (mit $\omega \neq 0$ konstant) ist

$$y(x) = C_1e^{\omega x} + C_2xe^{-\omega x}.$$

- ◯ Die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$ (mit $\omega \neq 0$ konstant) ist

$$y(x) = C_1e^{\omega x} + C_2e^{-\omega x}.$$

Frage 12

Lösen Sie die folgende Differenzialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}.$$

Hinweis:
Verwenden Sie das Verfahren von Lagrange um eine partikuläre Lösung zu bestimmen.

- ◯ $y(x) = (c_1 + xc_2 + 2x^3)e^{-x}$.
- ◯ $y(x) = (c_1 + xc_2 + 2x^2)e^{-x}$.
- ◯ $y(x) = (c_1 + x^2c_2 + 2x^2)e^{-x}$.

Frage 13

Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differenzialgleichung

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

ist gleich...

- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x\ln x + C_3x(\ln x)^2$
- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x^2$
- ◯ $y(x) = C_1x\ln x + C_2(\ln x)^2$
- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x\ln x$

Frage 14

Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differenzialgleichung

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

ist gleich...

- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x\ln x$
- ◯ $y(x) = C_1x + C_2x(\ln x)^2$
- ◯ $y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)$
- ◯ $y(x) = C_1x\cos(\ln x) + C_2x\sin(\ln x)$

Frage 15

Untersucht man die stationäre Temperaturverteilung auf einer homogenen Kreisscheibe oder auf einem homogenen Kreisring, so tritt die folgende Differentialgleichung für $y(r)$ auf:

$$y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{m^2}{r^2}y = 0.$$

Dabei bezeichnet r den Abstand vom Mittelpunkt der Kreisscheibe, und m ist eine beliebige natürliche Zahl. Klicken Sie die richtigen Aussagen an.

- ◯ Die Differentialgleichung ist homogen, linear und Euler'sch.
- ◯ Das Indexpolynom lautet $T^2 + T - m^2$.
- ◯ Die allgemeine Lösung lautet $y(r) = C_1 r^m + C_2 r^{-m}$, für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, für alle $m \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

Frage 16

Für welche Werte des Parameters $b \in \mathbb{R}$ bleiben alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$x^2 y'' + (1 - 2b)\, xy' + b^2 y = 0$$

für $x \to \infty$ beschränkt?

- ◯ $b < 1$
- ◯ $b < 0$
- ◯ $b \in \mathbb{R}$
- ◯ $b \leq 0$

Frage 17

Die Substitution

$$y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

in der Differenzialgleichung

$$x^2 y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

liefert...

- ◯ $x^2 g + 2xg' + g'' = -2\cos x$
- ◯ $-x^2 g + 2xg' + g'' = -2\cos x$
- ◯ $g'' - g = -2\cos x$
- ◯ $g'' - xg' = -2\cos x$

Frage 18

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung

$$x^2 y + 2xy' + y'' = -2\cos(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

durch Verwendung des Ansatzes $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- ◯ $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (c_1 e^x + c_2 e^x + \cos x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- ◯ $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \cos x\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- ◯ $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \cos x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.