Ferienserie 13

Bemerkung: Die Serie 13 wird nicht abgegeben. Eine Musterlösung steht auf der Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2 _mavt_matl/
Ferienpräsenz: ...

---

1. [Prüfung Winter 2013] *(Approximation der Kosinusfunktion im quadratischen Mittel).* Sei f die Funktion $x \mapsto f(x) = a + bx^2$ mit reellen Parametern a und b. Bestimmen Sie a und b so, dass das Integral

$$\int_{-1}^{1} \left(f(x) - \cos(\pi x)\right)^2 dx$$

minimal wird. Begründen Sie warum das Integral für diese Werte tatsächlich minimal ist.

2. [Prüfung Winter 2013] Berechnen Sie die Länge $L(t)$ des Graphen

$$\Gamma = \{(x, y) \,|\, y = \ln(x),\ t \leq x \leq 1\}$$

des natürlichen Logarithmus im Intervall $[t, 1]$ für $0 < t < 1$. Bestimmen Sie dann den Koeffizient a_0 in der Entwicklung

$$L(t) = \ln(\frac{1}{t}) + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

3. [Prüfungsaufgabe Herbst 2006] Finden Sie eine Rekursionsformel für die Taylor-Koeffizienten a_n der Lösung $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ des Anfangswertproblems

$$y''(x) + x^3 y(x) = x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

und bestimme $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$.

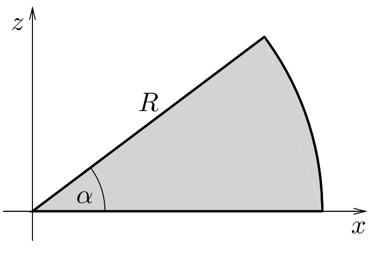
4. Finden Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x$$

auf der Viertelkreisscheibe

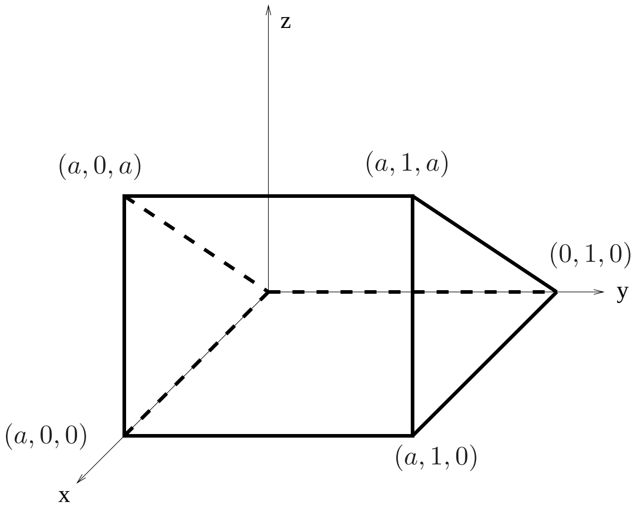
$$B = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \geq 0 \text{ und } y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

5. Die gezeichnete Kreissektorfläche (Radius R, Zentriwinkel α) soll um die z-Achse um einen Winkel β rotiert werden. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse des so entstandenen homogenen Körpers.



Bitte wenden!

6. Für eine reelle Zahl $a > 0$ sei W_a der folgende Körper.



Sei $f : [0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche Bedingung muss f erfüllen, damit der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \vec{v}\,(x, y, z) := (f\,(x)\,, yz, 0)$$

durch die Oberfläche von W_a unabhängig von a ist?

7. Bestimmen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der Funktion

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \mathrm{d}t.$$

8. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \left(y^2 z, xyz, 2xy^2\right).$$

Vom Nullpunkt des Koordinatensystems aus ist auf einem geradlinigen Weg W die Oberfläche der Einheitskugel zu erreichen. Die Arbeit des Vektorfeldes $\vec{v}$ soll dabei maximal werden. Bestimmen Sie den Endpunkt (X, Y, Z) des Weges mit maximaler Arbeit (alle Lösungen angeben).

9. Suchen sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2 - \sin(x + 2y)}{2\sin(x + 2y)}\ .$$