Serie 3

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die Online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zur Online MC-Fragen bis **Freitag, den 22.03.2013 um 14.00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 21.03.2013 oder Freitag, den 22.03.2013 während der Übungsstunde.
Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2_mavt_matl/

---

1. **Frage 1**

   Berechnen Sie
   $$\int\int_D xe^{x+y}\,dF,$$
   wobei $D = [0,1] \times [0,1]$.

   ○ $e - 1$

   ○ 1

   ○ $e + 1$

   Frage 2

   Berechnen Sie
   $$\int\int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dF,$$
   wobei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   ○ $\pi(1 + \frac{1}{e})$

   ○ $\pi(2 - \frac{1}{e})$

   ○ $\pi(1 - \frac{1}{e})$

Bitte wenden!

Frage 3

Berechnen Sie

$$\int\int_D x^2 y^2 \, dF,$$

wobei D das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ geschlossenes Gebiet bezeichnet.

- ◯ $\frac{4}{27}$
- ◯ $\frac{5}{27}$
- ◯ $\frac{1}{9}$

Frage 4

Für welches B ist

$$\int\int_B (2 - x^2 - 2y^2) \, dF$$

am grössten?

- ◯ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$
- ◯ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0\}$
- ◯ B ist eine gefüllte Ellipse um $(0, 0)$ mit Hauptachsen $\sqrt{2}$ und 1.

Frage 5

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, welcher von unten durch das Paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ und von oben durch die Ebene $z = 1$ begrenzt wird.

- ◯ $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$
- ◯ $\frac{\pi}{4}$
- ◯ $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 6

Sei T ein Tetraeder mit Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.
Berechnen Sie das Integral

$$\int\int\int_T f(x,y,z)dV,$$

mit $f(x,y,z) = x + y$.

- ◯ $\frac{4}{3}$
- ◯ $\frac{3}{4}$
- ◯ $\frac{1}{2}$

2. Wir betrachten eine vibrierende Kreisförmige Membran mit Radius R. Auf der Membran verwenden wir Polarkoordinaten $\varrho,\ \phi$. Die Auslenkung der Membran an der Stelle (ϱ, ϕ) zur Zeit t bezeichnen wir mit $u(\varrho, \phi, t)$. Sie erfüllt die zweidimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

mit die Randbedingung $u(R, \phi, t) = 0$, wobei c eine Materialkonstante der Membran ist und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ der Laplaceoperator in Polarkoordinaten ist.

i) Zeige: Ist λ eine reelle Zahl und $f(\varrho, \phi)$ eine Funktion mit

$$\Delta f = -\lambda^2 f$$

so ist für alle A, B

$$u(\varrho, \phi, t) = f(\varrho, \phi)(A\sin(\lambda ct) + B\cos(\lambda ct))$$

eine Lösung der Wellengleichung.

ii) Sei n eine ganze Zahl und $h(\varrho)$ eine Funktion, die die Differentialgleichung

$$h^{''} + \frac{1}{\varrho}h^{'} + (\lambda^2 - \frac{n^2}{\varrho^2})h = 0$$

erfüllt, so erfüllt für alle C, D

$$f(\varrho, \phi) = h(\varrho)(C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi))$$

die Differentialgleichung $\Delta f = -\lambda^2 f$ aus Teil (i).

iii) Zeige, dass

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{(\frac{1}{2}x)^{n+2m}}{m!(n+m)!}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{''} + \frac{1}{x}y^{'} + (1 - \frac{n^2}{x^2})y = 0$$

ist.

Bitte wenden!

iv) Zeige:

$$h(\varrho) = J_n(\lambda\varrho)$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$h^{''} + \frac{1}{\varrho}h^{'} + (\lambda^2 - \frac{n^2}{\varrho^2})h = 0$$

aus Teil (ii).

Bemerkung: Die Differentialgleichung aus Teil (iii) heisst die *Bessel'sche Differentialgleichung*; die Funktionen J_n *Besselfunktionen*. Man kann zeigen, dass die Besselfunktionen unendlich viele Nullstellen auf den positiven reellen Achse haben. Die Uebung zeigt: Ist $\omega > 0$ eine Nullstelle von J_n, so ist mit $\lambda = \frac{\omega}{R}$

$$u(\varrho, \phi, t) = J_n(\lambda\varrho) \cdot (C\sin(n\phi) + D\cos(n\phi))(A\sin(\lambda ct) + B\cos(\lambda ct))$$

eine Lösung der Gleichung für die vibrierende Membrane.

3. Das sogenannte Fehlerintegral

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$$

ist in der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie sehr wichtig. Das Integral konvergiert (vgl. U. Stammbach, Analysis I und II, Teil A, Kap. III, Abschnitt 13), aber die Stammfunktion von

$$x \mapsto e^{-x^2}$$

ist nicht durch elementare Stammfunktionen ausdrückbar. Berechnen Sie den Wert

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$$

mit Hilfe der folgenden Hinweis, der diesen Wert auf dem Umweg über ein Gebietsintegral liefert.
Hiweis: Berechnen Sie zuerst J^2 als

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\ dy = \int_{-\infty}^{\infty}\ dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\ dy,$$

und dann benützen Sie Polarkoordinaten.

4. Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment

$$J_0(D) = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

eines gleichseitigen homogenen Dreiecks mit Kantenlänge $a > 0$ bezüglich seines Schwerpunktes.