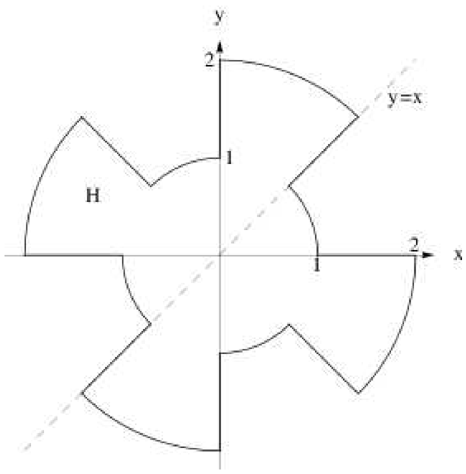
D-MAVT, D-MATL | Analysis II | FS 2013
Prof. Dr. P. Biran

Online Zwischentest - Serie 5

Willkommen zum 1. Online-Test, welcher die Serie 5 ersetzt. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, den 09.04.2013 um 22:00 Uhr** ab.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. **Viel Erfolg**!

Frage 1

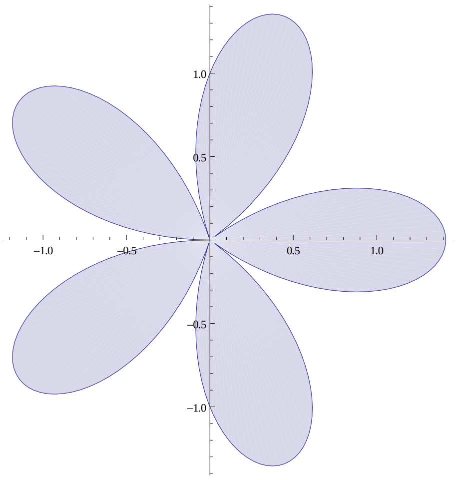
Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment J_0 der folgenden homogenen Fläche H bezüglich des Koordinatenursprungs.



- ◯ $\frac{19\pi}{4}$
- ◯ $\frac{17\pi}{4}$
- ◯ $\frac{18\pi}{4}$

Frage 2

[Prüfung Winter 2012, Teilaufgabe] Berechnen Sie das polare Trägheitsmoment $J_0 = \int_S (x^2 + y^2) dF$ der durch die Ungleichung $\rho^2 \leq 1 + \cos(5\phi)$ in Polarkoordinaten (ρ, ϕ) definierten Fläche S.



- ◯ $5\pi/4$
- ◯ $\pi/4$
- ◯ $3\pi/4$

Frage 3

Das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale mit Radius R und konstanter Flächendichte bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt ist proportional zu

- ◯ R^2.
- ◯ R^3.
- ◯ R^4.
- ◯ $R^{9/2}$.
- ◯ R^5.

Frage 4

Klicken Sie die richtigen Aussagen an.

- ◯ $\frac{1}{i} = -i$
- ◯ $i^{27} = -i$
- ◯ $i^{-9} = -i$
- ◯ $\frac{1+i}{2-2i} = \frac{1}{2}i$
- ◯ $|1 + i - \frac{i}{1-2i}| = \frac{\sqrt{65}}{5}$

Frage 5

Die Lösungen der komplexen Gleichung

$$z^4 + 2z^2 + 2 = 0$$

sind gleich

- ◯ $\pm\sqrt{2}e^{3\pi i/8}, \pm\sqrt{2}e^{5\pi i/8}$
- ◯ $-1 \pm i$
- ◯ $\pm\sqrt[4]{2}e^{3\pi i/8}, \pm\sqrt[4]{2}e^{5\pi i/8}$

Frage 6

Klicke die **falschen** Aussagen an:

- ◯ div ordnet einem Vektorfeld ein Skalarfeld zu.
- ◯ $\mathrm{div}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)$
- ◯ div des Coulombfeldes ist Null.
- ◯ grad ordnet einem Skalarfeld ein Vektorfeld zu.
- ◯ $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{v})$ ist eine sinnvolle Bildung.
- ◯ $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{v})$ ist eine sinnvolle Bildung.
- ◯ $\mathrm{rot}(\mathrm{div}\vec{v})$ ist eine sinnvolle Bildung.
- ◯ rot des Coulombfeldes ist Null.
- ◯ $\mathrm{div}(\mathrm{grad}f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

Frage 7

Klicke die **falschen** Aussagen an:

- ◯ $\operatorname{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ◯ $\operatorname{grad}(x+y+z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ◯ $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(x+y+z)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- ◯ $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- ◯ $\operatorname{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$

Frage 8

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(xz^{\alpha}r,\ yz^{\beta}r,\ z^2r^3\right) \quad \text{mit} \quad r := \sqrt{x^2+y^2}.$$

Für welche Konstanten α und β ist $rot(\vec{v}) = \vec{0}$?

- ◯ $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.
- ◯ $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.
- ◯ $\alpha = 3$ und $\beta = 2$.
- ◯ $\alpha = 3$ und $\beta = 3$.

Frage 9

Es ist eine Fläche gegeben durch die Parameterdarstellung $(u, v) \to \vec{r}(u, v)$. Der Vektor $\vec{n}(u, v)$ bezeichnet wie üblich den Normaleneinheitsvektor zur Fläche. Es sei P_0 der Punkt auf der Fläche, der zu (u_0, v_0) gehört. Klicken Sie die **falsche** Aussage an.

- ○ $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$.
- ○ Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ liegt in einer Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.
- ○ Wenn $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, dann spannen sie die Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.
- ○ Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ ist tangential an die u-Linie, die durch P_0 geht.

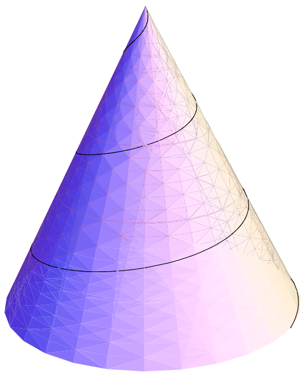
Frage 10

Welche der folgenden Abbildungen ist eine Parameterdarstellung der Mantelfläche des Kegels mit Spitze $(0, 0, 1)$ und Grundfläche die Einheitskreisscheibe um $(0, 0, 0)$ in der xy-Ebene?

- ○ $(u, v) \mapsto (u, v, 1 - \sqrt{u^2 + v^2})$, mit $u^2 + v^2 \leq 1$.
- ○ $(u, v) \mapsto (u, v, 1 - \sqrt{u^2 + v^2})$, mit $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$.
- ○ $(u, v) \mapsto (\sqrt{u^2 + v^2}, 0, 1 - u)$, mit $u^2 + v^2 \leq 1$.
- ○ $(u \cos v, u \sin v, 1 - u)$, mit $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$.

Frage 11

Welche der folgenden Parametrisierungen beschreibt die in der Abbildung gezeichnete Bahn einer sich auf der Kegeloberfäche bewegenden Ameise.



- ◯ $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, ht)$, mit $0 \leq t \leq 1$.
- ◯ $t \mapsto (a(1-t)\cos t, a(1-t)\sin t, ht)$, mit $0 \leq t \leq 1$.
- ◯ $t \mapsto (a(1-\frac{t}{2\pi})\cos(3t), a(1-\frac{t}{2\pi})\sin(3t), h\frac{t}{2\pi})$, mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

Frage 12

[Prüfung Winter 2012, Teilaufgabe] Eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ wird wie folgt definiert: Für jedes $h \in \mathbb{R}$ ist der Schnitt mit der horizontalen Ebene $z = h$ eine Gerade, die durch die z-Achse geht und einen Winkel $\frac{h}{L}$ mit der xz-Ebene einschliesst ($L > 0$ ist ein Parameter). Eine Parameterdarstellung dieser Fläche ist gegeben durch

- ◯ $\vec{r}(t,\phi) = (t\cos(\phi), t\sin(\phi), L\phi)$, für $t, \phi \in \mathbb{R}$.
- ◯ $\vec{r}(t,\phi) = (t\cos(\phi), t\sin(\phi), \phi)$, für $t, \phi \in \mathbb{R}$.
- ◯ $\vec{r}(t,\phi) = (t\cos(\phi), t\sin(\phi), L)$, für $t, \phi \in \mathbb{R}$.

Frage 13

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der sphärischen Kappe

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ , z \geq h\}.$$

zur Höhe $h > 0$ vom Radius R und mit Mittelpunkt im Ursprung.

- ◯ $2\pi Rh$
- ◯ $4\pi Rh$
- ◯ $4\pi(R - h)R$
- ◯ $2\pi(R - h)R$

Frage 14

Der Oberflächeninhalt des Graphs $z = f(x, y)$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist

- ◯ $\int\int_D dxdy$
- ◯ $\int\int_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dxdy$
- ◯ $\int\int_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dxdy$
- ◯ $\int\int_D |\, f_x(x, y) \times f_y(x, y)\, |\, dxdy$

Frage 15

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \vec{v}(x, y, z) = \big(x, y^2 + z, 3x\big)$$

durch das Dreieck D mit Ecken $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ in Richtung $\vec{n}(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ 3
- ◯ $-\frac{1}{2}$

Frage 16

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \vec{v}(x, y, z) = \big(yz, y^2z, yz^2\big)$$

von innen nach aussen durch den Zylindermantel

$$M = \big\{(x, y, z)\,\big|\,x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\big\}\,.$$

- ○ 0
- ○ $\frac{1}{2}$
- ○ $-\frac{1}{2}$

Frage 17

Der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y, z) = (x, y, z)$$

durch das Paraboloid

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\,\}$$

von oben nach unten ist gleich

- ○ $-\frac{3}{2}\pi$
- ○ $\frac{3}{2}\pi$
- ○ $\frac{\pi}{2}$
- ○ $-\frac{\pi}{2}$

Frage 18

Es seien $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ○ $\operatorname{div}(h(x)\vec{v}(x)) = \nabla(h(x)) \cdot \vec{v}(x) - h(x)\operatorname{div}\vec{v}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
- ○ $\operatorname{div}(h(x)\vec{v}(x)) = \dfrac{\nabla(h(x)) \cdot \vec{v}(x)}{h(x)\operatorname{div}\vec{v}(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
- ○ $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
- ○ $\operatorname{rot}(\nabla h(x)) = (1, 1, 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Frage 19

Es sei B die Einheitskugel um den Ursprung. Für welches der folgenden Vektorfelder darf der Divergenzsatz für den Bereich B **nicht** angewendet werden?

- ◯ $\vec{v} = (x, y, z)$
- ◯ $\vec{v} = C \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$
- ◯ $\vec{v} = (xyz, x^2z^2, x^3ze^y)$
- ◯ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- ◯ $\vec{v} = \vec{a}$

Frage 20

Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst quellenfrei wenn $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ und wirbelfrei wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Quellenfreie Vektorfelder sind auch wirbelfrei.
- ◯ Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sind quellenfrei.
- ◯ Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ sind quellenfrei.
- ◯ Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ sind wirbelfrei.

Frage 21

[Prüfung Winter 2009] Das Hagen–Poiseuille–Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \left(0, 0, \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) v_0\right)$$

beschreibt die Strömung einer zähen Flüssigkeit in einer zylindrischen Leitung mit Durchmesser $2a$. Wie gross ist v_0 in Metern pro Sekunde, wenn die Leitung eine Querschnittsfläche von 5 cm^2 hat und 1 Liter pro Sekunde fliessen soll?

[The Hagen–Poiseuille velocity field describes the flow of a viscous fluid in a cylindrical pipe. How big is v_0 in meter per second if the pipe has a cross sectional area of 5 cm^2 and 1 liter per second is required to flow through the pipe?]

- ◯ $v_0 = 3\,\text{m/s}$
- ◯ $v_0 = 4\,\text{m/s}$
- ◯ $v_0 = 5\,\text{m/s}$