Serie 6

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die Online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zur Online MC-Fragen bis **Freitag, den 19.04.2013 um 14.00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 18.04.2013 oder Freitag, den 19.04.2013 während der Übungsstunde.
Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2_mavt_matl/

---

1. **Frage 1**

   [Analysis Prüfung Winter 2012] Ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ erfülle $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$. Was folgt?

   ◯ Es gibt eine Funktion $f(x, y, z)$ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

   ◯ Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kreisscheibe D in der xy-Ebene verschwindet.

   ◯ Der Fluss $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.

   Frage 2

   [Analysis Prüfung He 1992] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

   $$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (yz, y^2 z, yz^2)$$

   von innen nach aussen durch den Zylindermantel

   $$M = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0, 1]\}.$$

   ◯ 2π

   ◯ 0

   ◯ 1

Frage 3

[Analysis Prüfung Frühling 2013] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$\vec{v} = (xyz,\ y\sin(xz),\ x^3 + y^3 + z^3)$$

durch die Oberfläche des Würfels

$$W = \{(x, y, z) \mid -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 1\}$$

von innen nach aussen.

- ◯ 4
- ◯ 8
- ◯ 16

2. Eine Gerade geht durch den Punkt $(1, 0, 0)$ und hat den Richtungsvektor $(0, 1, 1)$. Lässt man sie um die z-Achse rotieren, so erzeugt sie eine Fläche *(einschaliges Rotationshyperboloid)*.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Fläche an.

b) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Fläche.

c) In welchen Punkten der Fläche ist der Normalenvektor parallel zur Richtung des Vektors $(1, 1, -1)$?

d) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 2$.

3. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Teils des Kegels $x^2 + y^2 = 3z^2$, mit $z \ge 0$, der von dem Zylinder $x^2 + y^2 = 4y$ ausgeschitten wird.

4. Das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = c\left(1 - a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ -a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ 0\right)$ (c eine Konstante) beschreibt die Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen Zylinder vom Radius a, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt.

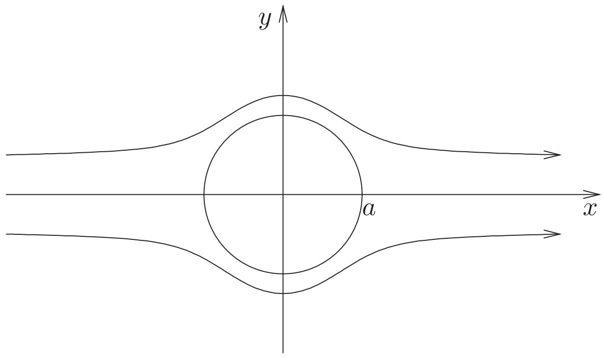
Zeigen Sie:

a) $\mathbf{div}\,\vec{v} = 0$,

b) $\mathbf{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$,

c) an der Oberfläche des Zylinders verläuft die Strömung tangential,

d) in grosser Entfernung vom Zylinder ist das Vektorfeld nahezu homogen.



Bestimmen Sie die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.