Serie 9

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die Online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zur Online MC-Fragen bis **Freitag, den 10.05.2013 um 14.00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Freitag, den 10.05.2013 während der Übungsstunde oder im Fächli.
Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2 _mavt_matl/

---

1. **Frage 1**

Gegeben ist eine lineare und homogene Differenzialgleichung, welche $y : x \to \sin x$ als Lösung besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

◯ $x \to \cos x$ ist ebenfalls eine Lösung.

◯ $x \to \sin(2x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

◯ $x \to 2\sin(x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

Frage 2

Finden Sie die Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

◯ $y(x) = \frac{1}{4}\left(3\,e^{-x} + e^{3x}\right)$.

◯ $y(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{3x}$.

◯ $y(x) = \frac{1}{4}\left(e^{-x} + 3e^{3x}\right)$.

Bitte wenden!

Frage 3

Finden Sie die Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung

$$y'' + 2y = x^2,$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

- ◯ $y(x) = \frac{1}{4}\, e^{i\sqrt{2}x} + \frac{1}{4}\, e^{-i\sqrt{2}x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\sqrt{2}x\right) + x^2 - 1\right).$
- ◯ $y(x) = C_1\, e^{i\sqrt{2}x} + C_2\, e^{-i\sqrt{2}x}.$
- ◯ $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.$

Frage 4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung

$$2y'' - y' - 6y = e^{3x}.$$

- ◯ $y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x}.$
- ◯ $y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}.$
- ◯ $y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}.$

Frage 5

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = 3y + \cos(x).$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist gleich $y(x) = ke^{3x} + \cos x$, für $k \in \mathbb{R}$.
- ◯ Eine partikuläre Lösung der Differenzialgleichung ist gleich $y(x) = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$.
- ◯ Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist gleich $y(x) = ke^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$, für $k \in \mathbb{R}$.
- ◯ Die allgemeine Lösung der homogene Differenzialgleichung ist gleich $y(x) = \pm e^{C} \cdot e^{3x}$, für $C \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 6

Suchen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = -2\frac{y}{x} + e^x.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist gleich...

- ◯ $y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^2}$, für $k \in \mathbb{R}$.
- ◯ $y(x) = \frac{k}{x^2}$, für $k \in \mathbb{R}$.
- ◯ $y(x) = \frac{k}{x^2} + e^x$, für $k \in \mathbb{R}$.
- ◯ $y(x) = \frac{k+x^2-2x}{x^2}$, für $k \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

Frage 7

Das Wachstum einer Taufliegen-Population unter Laborbedingungen kann näherungsweise durch die Differenzialgleichung

$$f'(t) = 0,0006 \cdot (350 - f(t)) \cdot f(t)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet $f(t)$ die Anzahl der Taufliegen zur Zeit t in Tagen. Für welche Zahlen $a > 0$ ist die Funktion

$$f(t) = \frac{350}{a \cdot e^{-0,21t} + 1}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung?

- ◯ Für kein a.
- ◯ Nur für $a = 350 = \lim_{t\to\infty} f(t)$.
- ◯ Nur für $a = \ln(|-0,21|)$.
- ◯ Nur für $a = \ln\left(\frac{1}{|-0,21|}\right)$.
- ◯ Für jedes a.

2. Die Differenzialgleichung

$$\left(2x - x^2\right) y'' + \left(x^2 - 2\right) y' + 2\,(1-x)\,y = 0$$

besitzt die Lösung $y_1 : x \longmapsto e^x$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitution $y(x) = z(x)e^x$ die allgemeine Lösung.

3. Betrachten Sie die Schar von Kreise

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2,$$

wobei $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die Schar deren Orthogonaltrajektorien.

4. Betrachten Sie die 3-parametrige Kurvenschar

$$y(x) = C_1 \cos(C_3 x) + C_2 \sin(C_3 x)$$

mit den Parametern $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine zugehörige Differentialgleichung.