

ETHZ, D-MAVT
Frühling 2006 Basisprüfung
Lineare Algebra
K. Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind nicht erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!



1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3 - 6a & -6 + 5a \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte des Parameters a besitzt die Matrix A eine Inverse?

2. Gegeben sind die vier Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, 4$, wobei

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}.$$

Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y -Richtung

$$\sum_{i=1}^4 [f(x_i) - y_i]^2$$

minimal wird.

3. Bestimmen Sie im \mathbb{R}^3 die Matrix der Spiegelung an der (x, y) -Ebene
- a) bezüglich der Standardbasis;
 - b) bezüglich der Basis $e_1 = (1, 1, 0)^T$, $e_2 = (-1, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ von \mathbb{R}^3 .
(Begründung!)

4. a) Diagonalisieren Sie – falls möglich – die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Kann man in den Fällen, in denen die Matrizen diagonalisierbar sind, die entsprechenden Transformationsmatrizen T orthogonal wählen? Wenn ja, geben Sie so ein T an.

5. Für welche Parameterwerte t lässt sich der Vektor

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -27 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

darstellen? Bestimmen Sie die Koeffizienten der Linearkombination.

6. Gegeben Sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = Ay$ wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 3, y_2(0) = 5, y_3(0) = 2$.
- b) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \rightarrow -\infty$.