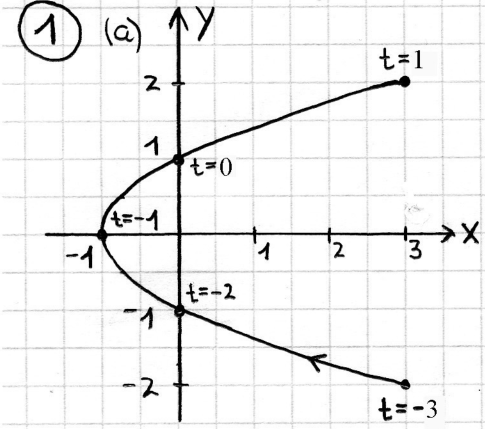
# Übungsserie 1, HS 2012, Seite 1

## 1

(a)




$\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t^2+2t\\t+1\end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 = t(t+2) \to t_1 = 0,\ t_2=-2$

in $y(t)$: $y_1 = 1,\ y_2 = -1$

Schnittpunkte y-Achse: $\underline{\underline{(0,1)}}$ und $\underline{\underline{(0,-1)}}$

$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t^2+2t\\t+1\end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 = t+1 \to t_3 = -1$, in $x(t)$: $x_3 = -1$

Schnittpunkt x-Achse: $\underline{\underline{(-1,0)}}$

(b) $x = t^2+2t$

$y = t+1 \leftrightarrow t = y-1$ in $x(t)$: $x = (y-1)^2 + 2(y-1)$

$x = y^2-2y+1+2y-2$

$\underline{\underline{x = y^2-1}}$ liegende Parabel

---

## 2

(a) $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}\sqrt{2}\,t\\\sqrt{1-t^2}\\\sqrt{1-t^2}\end{pmatrix} \leftrightarrow 0 = 1-t^2 \rightsquigarrow$ $t_1 = -1$ in $\vec r(t)$ $(-\sqrt{2},0,0)$ (auf x-Achse!)

$t_2 = +1$ ″ $(+\sqrt{2},0,0)$ ″

(b) $\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{1-t^2} \\ z &= \sqrt{1-t^2}\end{aligned}\right\}$ gleich, d.h. $y = z$ (im Aufriss auf einer Linie liegend) $\rightsquigarrow$ In der Ebene $y - z = 0$ liegend.

(Bem: $\gamma$ verläuft auf einer Kugel wegen (c) und in einer Ebene (b) $\rightsquigarrow$ ebener Kugelschnitt d.h. Kreisstück)

(c) Sei $P \in \gamma$. Für die Länge des Vektors $\vec{OP}$ gilt:

$|\vec{OP}| = |\vec r| = \sqrt{(\sqrt{2}t)^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 + (\sqrt{1-t^2})^2} = \sqrt{2t^2+1-t^2+1-t^2} = \sqrt{2}$

(d) $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-(\cos t^*)^2} = \sqrt{(\sin t^*)^2} \underset{\geq 0}{=} \sin t^*$ $\qquad t_1 = -1 = \cos t_1^* \to t_1^* = \pi$

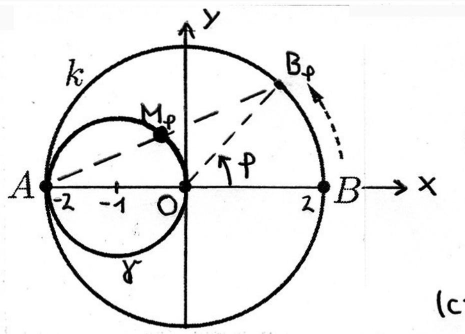
$t_2 = 1 = \cos t_2^* \to t_2^* = 0$

$\gamma: [\pi, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t^* \longmapsto \vec r(t^*) = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos t^*\\\sin t^*\\\sin t^*\end{pmatrix}$

(e) $\gamma': [\pi, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t^* \longrightarrow \vec r(t^*) = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos t^*\\\sin t^*\end{pmatrix}$ $\qquad$ Ellipse (in $(x,y)$-Ebene) mit Mittelpt $(0,0)$ und Halbachsen $a = \sqrt{2}$, $b = 1$

---

## 3




$B_\varphi = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi) \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi \qquad AB_\varphi = \begin{pmatrix}2\cos\varphi-(-2)\\2\sin\varphi - 0\end{pmatrix}$

$OM_\varphi = OA + \frac{1}{2}\vec{AB_\varphi} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cos\varphi+2\\2\sin\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi-1\\\sin\varphi\end{pmatrix}$

$\gamma: \varphi \longmapsto \vec r(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi - 1\\\sin\varphi\end{pmatrix} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$

(c2) Kreis um $(-1,0)$ mit Radius 1: $\vec r(\varphi) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}$

---

## 4

Zur Erinnerung die Regeln: ① $(x^n)' = nx^{n-1}$, speziell: $(x^1)' = 1\cdot x^0 = 1$, $(\text{Zahl})' = 0$ ② $(f+g)' = f'+g'$ ③ $(\text{Zahl}\cdot f)' = \text{Zahl}\cdot f'$ ④ $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$ ⑤ $(f\cdot g)' = f'\cdot g + fg'$ ⑥ $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ innere Abl.

(a) $x'(t) = (t-1)' \overset{②}{=} (t)' - (1)' \overset{①}{=} \underline{\underline{1}}$

(b) $y'(t) = (2t-1)' \underset{②}{=} (2t)' - (1)' \overset{③}{=} 2(t)' - (1)' \overset{①}{=} \underline{\underline{2}}$

(c) $y'(t) = \Big(R\underbrace{\cos}_{f(\cdot)}\underbrace{\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)}_{g(t)}\Big)' \overset{④}{\underset{⑥}{=}} R\left(-\sin\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)\right)\cdot\underbrace{\left(\tfrac{2\pi}{60s}\cdot t\right)'}_{\text{innere Abl}} \overset{①}{=} -R\sin\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)\tfrac{2\pi}{60s} = \underline{\underline{-\tfrac{2\pi R}{60s}\sin\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)}}$

(d) $x'(t) = (a\underbrace{t\cos t}_{f\cdot g})' \overset{③}{\underset{⑤}{=}} a[\underbrace{(t)'\cos t}_{f'\cdot g} + \underbrace{t(\cos t)'}_{f\cdot g'}] \overset{①}{\underset{④}{=}} \underline{\underline{a[\cos t - t\sin t]}}$

(e) $y'(t) = (t\underbrace{R\sin\varphi}_{\text{Zahl}})' \overset{③}{=} R\sin\varphi\,(t)' \overset{①}{=} \underline{\underline{R\sin\varphi}}$

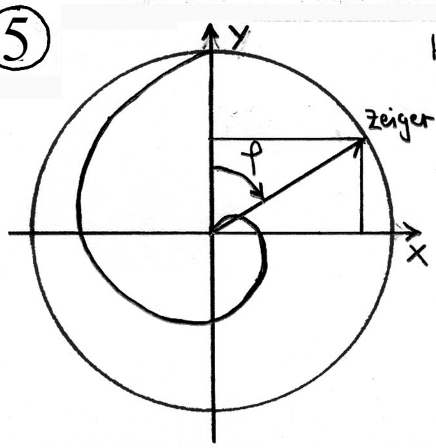
(f) $y'(\varphi) = (tR\sin\varphi)' \overset{③}{=} tR(\sin\varphi)' \overset{④}{=} \underline{\underline{tR\cos\varphi}}$

(g) $z'(\varphi) = \left(\tfrac{h}{2\pi}\varphi\right)' \overset{③}{=} \tfrac{h}{2\pi}(\varphi)' \overset{①}{=} \underline{\underline{\tfrac{h}{2\pi}}}$

(h) $z'(t) = \Big(\underbrace{\tfrac{h}{2\pi}\varphi}_{\text{Zahl}}\Big)' \overset{①}{=} \underline{\underline{0}}$

(i) $y'(\varphi) = (\underbrace{e^\varphi}_{f}\cdot\underbrace{\sin\varphi}_{g})' \overset{⑤}{=} \underbrace{(e^\varphi)'\sin\varphi}_{f'\cdot g} + \underbrace{e^\varphi(\sin\varphi)'}_{f\cdot g'} \overset{④}{=} \underline{\underline{e^\varphi\sin\varphi + e^\varphi\cos\varphi}}$ $\quad$ (da $(e^\varphi)' = e^\varphi$)

5




KS: Ursprung in der Uhrenmitte, y-Achse in Richtung 12 Uhr

$t$: Kriechzeit der Raupe in min

Nach der Zeit $t$: Radius $r$ = Kriechstrecke $= 2\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot t$

Zeigerwinkel $\varphi = \frac{360°}{60\text{min}} t = 6°/_{\text{min}} \cdot t$ oder $\frac{2\pi}{60\text{min}} \cdot t$

x-Wert: $x = r \sin\varphi$ (Gegenkathete), y-Wert: $y = r\cos\varphi$ (Ankathete)

Kurve: $t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{\text{cm}}{\text{min}}\, t \,\sin\left(\frac{2\pi}{60\text{min}}\, t\right) \\ 2\frac{\text{cm}}{\text{min}}\, t\, \cos\left(\frac{2\pi}{60\text{min}}\, t\right) \end{pmatrix} \quad t > 0$

---

6

(a) Sei $P$ ein beliebiger Punkt der Schnittkurve. Die (vertikale) Mantellinie auf dem Zylinder durch $P$ schneidet die Berührkreise $k_1$ und $k_2$ in den Punkten $B_1$ und $B_2$. Sie ist Tangente beider Kugeln. $PF_1$ und $PB_1$ sind Tangentenabschnitte von $P$ an die obere Kugel und sind deshalb gleich lang: $|PF_1| = |PB_1|$ ①

Analog gilt für die Tangentenabschnitte: $|PF_2| = |PB_2|$ ②

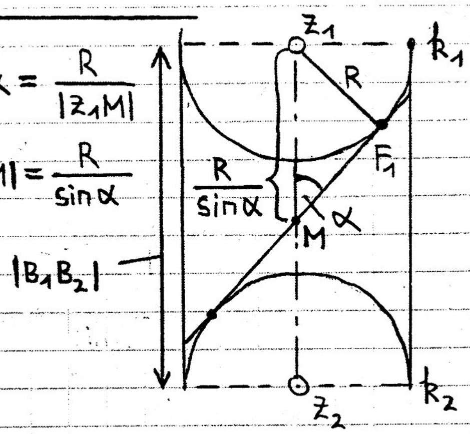
$$|PF_1| + |PF_2| \overset{①,②}{=} |PB_1| + |PB_2| = |B_1B_2| = \text{konst.}$$

Alle Punkte $P$ der Schnittkurve haben die konstante Entfernungssumme $|B_1B_2|$ zu $F_1, F_2$ $\rightsquigarrow$ Ellipse!

*

$$\sin\alpha = \frac{R}{|Z_1M|}$$

$$|Z_1M| = \frac{R}{\sin\alpha}$$




(b) Kl. Halbachse $b = R$ (Zylinderradius), Figur *

gr. Halbachse $a \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}|B_1B_2| \overset{*}{=} |Z_1M| = \frac{R}{\sin\alpha}$