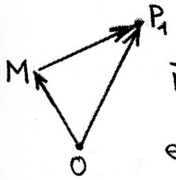
# Übungsserie 2. HS 2012. Seite 1

**1** (a) $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ebenso ist $|\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = \ldots = |\overrightarrow{OP_6}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

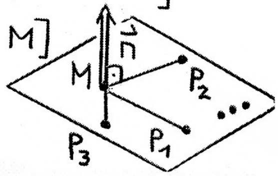
(b) $\overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3} \\ " \\ " \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3a - 1/3b - 1/3c \\ 2/3b - 1/3a - 1/3c \\ 2/3c - 1/3a - 1/3b \end{pmatrix}$ analog für $\overrightarrow{MP_2}, \ldots, \overrightarrow{MP_6}$ nur mit vertauschten Komponenten




$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MP_1} = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c\right) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}c\right) + \left(\frac{2}{3}c - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) = 0 \rightsquigarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{MP_1}$

ebenso ist $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP_2} = 0, \ldots, \vec{n} \cdot \overrightarrow{MP_6} = 0$ also $\vec{n} \perp \overrightarrow{MP_2}, \ldots, \overrightarrow{MP_6}$

(c) Gemäss (a) liegen $P_1, \ldots, P_6$ auf einer Kugel [um (0,0,0) mit Radius $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$]
gemäss (b) liegen $P_1, \ldots, P_6$ in einer Ebene [senkrecht zu $\vec{n}$ durch den Punkt M]
der Schnitt von einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis!
d.h. $P_1, \ldots, P_6$ liegen auf einem Kreis [Kreismittelpunkt ist M]




---

**2** (a) t-Werte von Kurvenpunkten im Ursprung: $\left.\begin{array}{l} 0 \overset{\text{soll}}{=} x(t) = t^2 - 1 \\ 0 \overset{\text{soll}}{=} y(t) = t^3 - t \end{array}\right\} \rightsquigarrow t = \pm 1$

$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}(-1)$, also eine Selbstdurchdringung in (0,0)

(b) Tangentialvektor: $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$, für $t = -1$: $\vec{r}\,'(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t = 1$: $\vec{r}\,'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

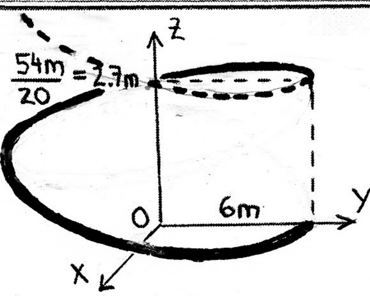
$\underbrace{\vec{r}\,'(-1)}_{\neq \vec{0}} \cdot \underbrace{\vec{r}\,'(1)}_{\neq \vec{0}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0 \longrightarrow$ Schnittwinkel ist $\underline{\underline{90°}}$

(c) Im "höchsten" Punkt der Schleife ist $\vec{r}\,'(t)$ horizontal: $0 \overset{\text{soll}}{=} 3t^2 - 1 = y'(t) \Leftrightarrow 3t^2 = 1$

$\rightsquigarrow t = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\quad x\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$

---

**3**




In 120 Tagen 20 Etagen bzw. Umdrehungen → In 6 Tagen 1 Umdrehung

Winkel φ bez. y-Achse: $\varphi(t) = \frac{2\pi}{6d}\, t$ $\quad (0 \le t \le 120d)$ d ≙ days

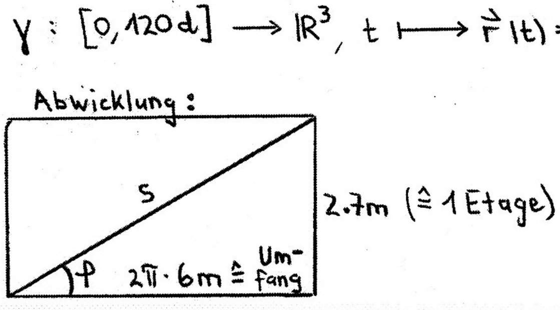
Höhe z bez. (x,y)-Ebene: $z(t) = \frac{54m}{120d} \cdot t = 0.45 \frac{m}{d}\, t$ (In 6 Tagen 2.7m ≙ 1 Etage)

Der Radius ist konstant (Schraubenlinie!) sin ↔ cos tauschen für Uhrzeigersinn:

(a) $\gamma : [0, 120d] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \sin\varphi(t) \\ r \cos\varphi(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{6d}t\right) \\ 6m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6d}t\right) \\ 0.45\frac{m}{d} \cdot t \end{pmatrix}$

Abwicklung:

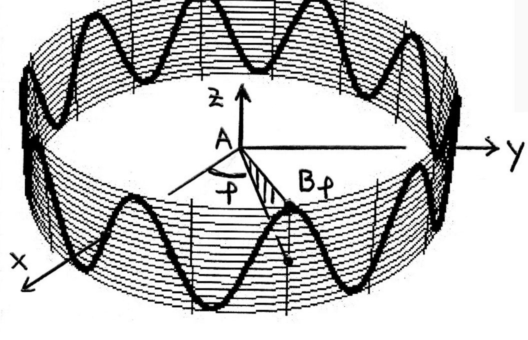
(b)




$s = \sqrt{2.7^2 + (2\pi \cdot 6)^2} = 37.8\,m$ pro Etage

Insgesamt $20 \cdot s = \underline{\underline{756\,m}}$

**4** (a) Koordinatensystem: z-Achse = Ringachse, Ursprung im Ringzentrum, Lebenslinie "beginnt" auf x-Achse




Der Grundriss der Linie ist ein Kreis mit Radius 10 [mm]

$$\rightsquigarrow \quad \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 10\cos\varphi \\ 10\sin\varphi \\ z(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \text{ (Drehwinkel)}$$

$z(\varphi)$ oszilliert sinusförmig zw. $-3$ [mm] und $+3$ [mm], und zwar 10-mal für $\varphi$ von 0 bis $2\pi$: $z(\varphi) = 3\sin(10\varphi)$

$$\text{Leb'linie: } [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 10\cos\varphi \\ 10\sin\varphi \\ 3\sin(10\varphi) \end{pmatrix}$$

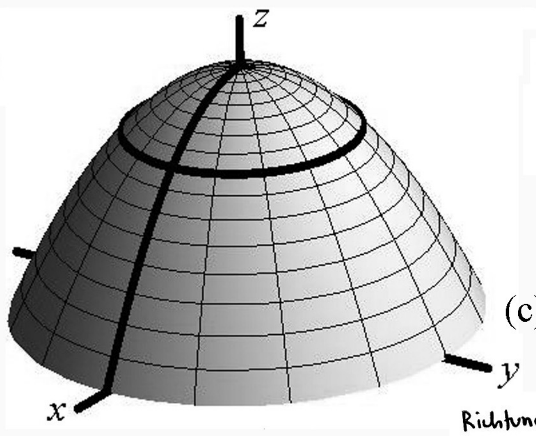
(b) A ist fest. Um eine Linie $AB_\varphi$ zu "zeichnen" ist ein Parameter $t$ nötig. Für einen Flächenpunkt $\vec{r}$ auf der Linie $AB_\varphi$ gilt:

$$\vec{r} = \vec{OA} + t\,\vec{AB_\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10\cos\varphi - 0 \\ 10\sin\varphi - 0 \\ 3\sin(10\varphi) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t\cos\varphi \\ 10t\sin\varphi \\ 3t\sin(10\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\text{Also:} \quad (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 10t\cos\varphi \\ 10t\sin\varphi \\ 3t\sin(10\varphi) \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t \le 1)$$

---

**5**

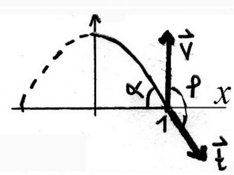



(b) $\varphi$-Linien: Kreise mit Mittelpt. auf z-Achse parallel (x,y)-Ebene

$t$-Linien: (Halb-) Parabeln mit Scheitel in (0,0,1) nach unten geöffnet mit Öff.faktor $-1$, in Ebenen $\perp$ (x,y)-Ebene

$$t\text{-Linie zu } \varphi = 0: \quad t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos 0 \\ t\sin 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$$

(c) Auftreffpunkt: $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow t = 1$, $x = 1, y = 0$




Richtung der t-Linie in (1,0,0): $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
($\varphi_0 = 0$, $t_0 = 1$)

Richtung der Vertikalen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zw. $\measuredangle$: $\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\|\ \|\cdot\|\ \|} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$ $\quad \alpha = 63.4349°$

vgl. Skizze

Rotationssymm. → alle (Halb-)Parabeln sind kongruent und haben den gleichen Auftreffwinkel $\alpha$

---

**6**

(a)
$$\begin{pmatrix} \cancel{-\frac{1}{2}R} \\ 0 \\ h/2\pi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - R\cdot h/2\pi \\ 0 - 0 \\ -\frac{1}{2}R\cdot R - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi}Rh \\ 0 \\ -\frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}$$
$-\frac{1}{2}R \quad 0$
$0 \quad R$

(b)
$$\begin{pmatrix} \cancel{t_0R\cos\varphi_0} \\ t_0R\sin\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{-R\sin\varphi_0} \\ R\cos\varphi_0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0R\sin\varphi_0\cdot h - 0 \\ 0 - h\cdot t_0R\cos\varphi_0 \\ \underbrace{t_0R^2\cos^2\varphi_0 + t_0R^2\sin^2\varphi_0}_{t_0R^2\underbrace{(\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0)}_{=1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0R\sin\varphi_0\cdot h \\ -t_0R\cos\varphi_0\cdot h \\ t_0R^2 \end{pmatrix}$$
$t_0R\cos\varphi_0 \quad -R\sin\varphi_0$
$t_0R\sin\varphi_0 \quad R\cos\varphi_0$

(c)
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -t\cdot\sin\varphi \\ t\cdot\cos\varphi \\ t \end{pmatrix}, \ \vec{t} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \ \vec{s}\times\vec{t} = \begin{pmatrix} \cancel{-t\cdot\sin\varphi} \\ t\cdot\cos\varphi \\ t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{\cos\varphi} \\ \sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\varphi\cdot\varphi - t\sin\varphi \\ t\cos\varphi + \varphi t\sin\varphi \\ \underbrace{-t\sin^2\varphi - t\cos^2\varphi}_{-t(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi t\cos\varphi - t\sin\varphi \\ \varphi t\sin\varphi + t\cos\varphi \\ -t \end{pmatrix}$$
$-t\cdot\sin\varphi \quad \cos\varphi$
$t\cdot\cos\varphi \quad \sin\varphi$

(d)
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 0 \\ 2\cos\varphi \end{pmatrix}, \ \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \ \vec{s}\times\vec{t} = \begin{pmatrix} \cancel{-2\sin\varphi} \\ 0 \\ 2\cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2\cos\varphi \\ 0 + 2t\cdot 2\sin\varphi \\ -2\sin\varphi - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ 4t\sin\varphi \\ -2\sin\varphi \end{pmatrix}$$
$-2\sin\varphi \quad 0$
$1$