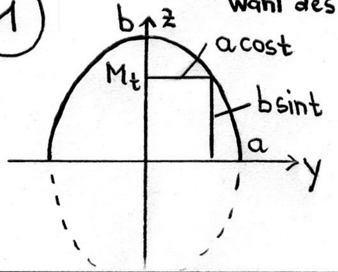
1



Wahl des KS: Ursprung in Grundkreismittelpunkt, z-Achse $\hat{=}$ Symmetrieachse

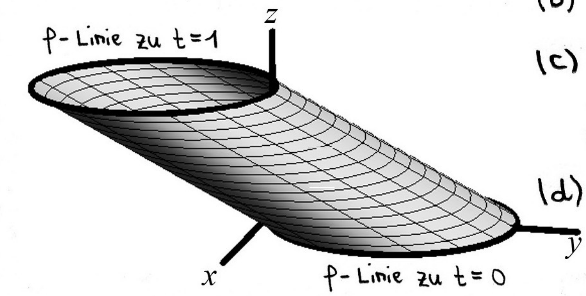
(a) $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ $\qquad$ (b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le t \le \pi$

(c) $\vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} a\cos t\cos\varphi \\ a\cos t\sin\varphi \\ b\sin t \end{pmatrix}$ $\quad \left(0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

2

(a) φ-Linie zu $t=0$ bzw. $t=1$: Horizontaler Kreis mit Radius 1 um $(0,1,0)$ bzw. um $(0,-1,1)$, allg. horizontale Kreise mit $r=1$

(b) t-Linien sind Geradenstücke parallel zur (y,z)-Ebene



(c) S entsteht durch Parallelverschieben einer Geraden entlang den beiden Kreisen (oder einem davon) → Schar gerader Linien → ist Regelfläche (verallg. Zylinderfläche)

(d) $x = \cos\varphi$, $y = 1 + \sin\varphi - 2t = 1 + \sin\varphi - 2z$, $z = t$

$$\sin\varphi = (y + 2z - 1)$$

$$\underline{1} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \underline{x^2 + (y+2z-1)^2}$$

(e) $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ 2\sin\varphi_0 \end{pmatrix}}}$$

$-\sin\varphi_0 \quad 0$

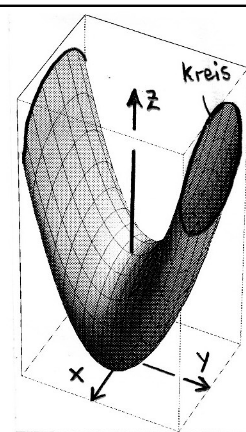
$\cos\varphi_0 \quad -2$

$\vec{n}$ ist unabhängig von t, d.h. $\vec{n}$ ist konstant entlang der t-Linie ⇝ abwickelbar

3

(a) Kreis K mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0,0)$: $\quad \varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 0 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

Parabel p: $z = y^2$. Setze $y = t$ ⇝ $x = 0$, $y = t$, $z = t^2$: $\quad t \mapsto \vec{r}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}}_{\text{in (b) Mittelpunkt } M_t \text{ von } K}$ $\quad -\infty < t < \infty$



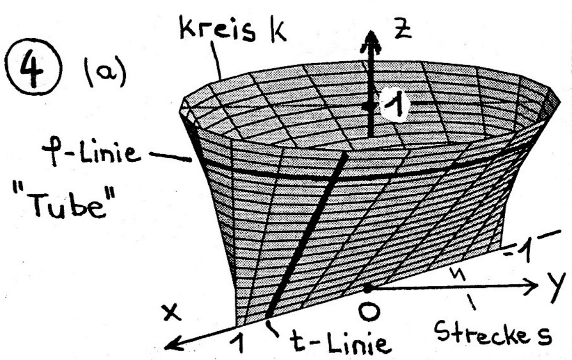
(b)

Kreis K bez M_t: $\overrightarrow{M_tP} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 0 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}$, bez O: $\vec{r}(\varphi,t) = \overrightarrow{OM_t} + \overrightarrow{M_tP} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 0 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}$

Also: $\quad S: (\varphi, t) \longmapsto \underline{\underline{\vec{r}(\varphi,t) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ t \\ t^2 + 2\sin\varphi \end{pmatrix}}}$ $\quad (0 \le \varphi \le 2\pi, -\infty < t < \infty)$

4

(a)



φ-Linie zu $t=0$: $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi, 0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Geradenstück auf der x-Achse von -1 bis 1

φ-Linie zu $t=1$: $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi, 1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Kreis mit Mittelpunkt $(0,0,1)$ parallel zur (x,y)-Ebene mit Radius 1

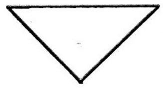
Allg. φ-Linie: $\varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi, t_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ t_0\sin\varphi \\ t_0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Ellipse mit Mittelpt $(0,0,t_0)$ und Halbachsen $a=1$, $b=t_0$ parallel zur (x,y)-Ebene

t-Linie zu $\varphi = 0$: $t \longmapsto \vec{r}(0, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ $\quad$ Geradenstück bei $x=1$ parallel zur z-Achse

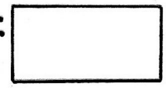
Allg t-Linie: $t \longmapsto \vec{r}(\varphi_0, t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Geradenstück parallel (y,z)-Ebene

Fazit: t-Linien: Geradenstücke (parallel (y,z)-Ebene), φ-Linien: Ellipsen um die z-Achse

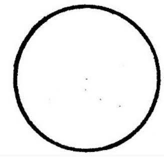
(b) Entlang x-Achse: (gleichschenkliges Δ)



Entlang y-Achse: (Rechteck)

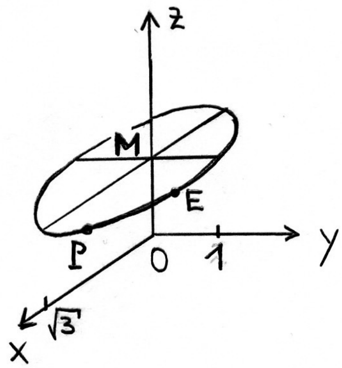


Entlang z-Achse: (Kreis)



---

5 (a) Ellipse bez M: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ 1\cdot\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$



bez O: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

(b) Gerade durch O und $(\sqrt{3}\cos t, \sin t, 1)$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}s\cdot\cos t \\ s\cdot\sin t \\ s \end{pmatrix}$$

Kegelfläche: $(s,t) \longmapsto \vec{r}(s,t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3}s\cos t \\ s\sin t \\ s \end{pmatrix}}}$ $\quad (-\infty < s < \infty,\ 0 \le t \le 2\pi)$

(c) $x = \sqrt{3}s\cdot\cos t,\quad y = s\cdot\sin t,\quad z = s$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = s^2\cdot\cos^2 t + s^2\cdot\sin^2 t = s^2\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = z^2 \rightsquigarrow \underline{\underline{\frac{x^2}{3} + y^2 = z^2}}$$

(d) Abwickelbar, da verallgemeinerte Kegelfläche

(e) $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(s_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t_0 \\ \sin t_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{t} = \vec{r}\,'_{s_0}(t_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}s_0(-\sin t_0) \\ s_0\cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{s}\times\vec{t} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t_0 \\ \sin t_0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{3}s_0\sin t_0 \\ s_0\cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_0\cos t_0 \\ -\sqrt{3}s_0\sin t_0 \\ \sqrt{3}s_0\underbrace{(\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0)}_{=1} \end{pmatrix} = s_0\begin{pmatrix} -\cos t_0 \\ -\sqrt{3}\sin t_0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{3}\cos t_0 \qquad -\sqrt{3}s_0\sin t_0$

$\sin t_0 \qquad s_0\cos t_0$