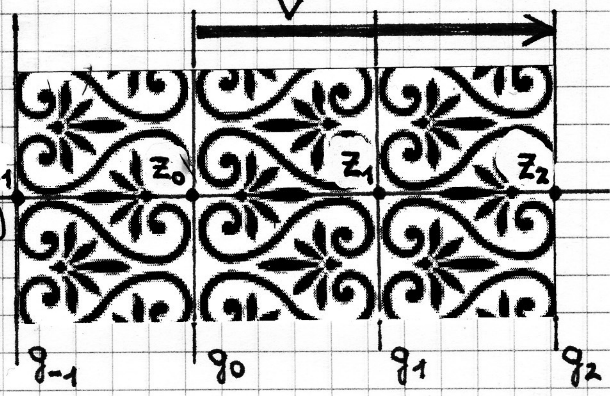
Übungsserie 5 FS 2013 Seite 1

1

Die horizontale unendliche Ausdehnung des Bandornaments hat zur Folge:



(a) als Translationsrichtung kommt nur die horizontale Richtung in Frage. Periodisches Muster $\rightsquigarrow$ $T_{\vec{w}}$ mit $\vec{w} = n\vec{v}$ (ganzzahlige Vielfache von $\vec{v}$)
d.h. $\ldots, -2\vec{v}, -\vec{v}, \vec{v}, 2\vec{v}, \ldots$

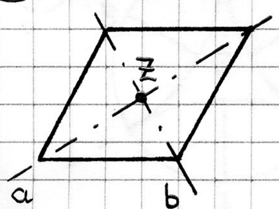
(b) als Symmetrieachsen kommen nur Mittelparallele ($\parallel \vec{v}$) oder Vertikale ($\perp \vec{v}$) Geraden in Frage. Muster $\rightsquigarrow$
S_h ; $\ldots, S_{g_{-1}}, S_{g_0}, S_{g_1}, \ldots$
Abstand benachbarter g_k, g_{k+1} : $\frac{v}{2}$

(c) als Drehwinkel kommt nur 180° in Frage, als Drehzentren nur Punkte auf Mittelparallele h
Muster $\rightsquigarrow$ Halbdrehungen (Punktspiegelungen) $\ldots, R_{Z_{-1}}, R_{Z_0}, R_{Z_1}, \ldots$; $|Z_k Z_{k+1}| = \frac{v}{2}$

(d) Gleitspiegelungen $S_h \circ T_{\vec{w}}$ mit Translationsvektor $\vec{w} = n\vec{v}$ ($n \in \mathbb{Z}$) und Sp.gerade h
Gleitspiegelungen mit Spiegelungsachsen $\perp$ h lassen sich auf reine Geradenspieg. reduzieren
z.B. $S_{g_1} \circ T_{\vec{v}} = S_{g_0}$ (gleiche Zuordnung!)

2

(a) Rhomus: I ; $R_{Z,180°}$; S_a ; S_b | Muster: I ; $R_{90°}$; $R_{180°}$; $R_{270°}$ (um Z) Mitte Muster!



(b)

∘	I	R	S_a	S_b
I	I	R	S_a	S_b
R	R	I	S_b	S_a
S_a	S_a	S_b	I	R
S_b	S_b	S_a	R	I

∘	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}
I	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	I
R_{180}	R_{180}	R_{270}	I	R_{90}
R_{270}	R_{270}	I	R_{90}	R_{180}

In der Hauptdiagonale stets I , hier nicht (zyklisch!)

3

(a)

Wortlänge	Anz	Wort
1	1	B
2	2	AB, BB
3	3	ABB, BBB, BAB
4	5	ABBB, BBBB, BABB, ABAB, BBAB
5	8	ABBBB, BBBBB, BABBB, ABABB, BBABB, ABBAB, BBBAB, BABAB
⋮		
n	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	, $(a_1 = 1,\ a_2 = 2)$

(b)

$\hookrightarrow$ alle Wörter der vorvorhergehenden Länge können durch AB ergänzt werden

$\rightarrow$ alle Wörter der vorhergehenden Länge* können durch B ergänzt werden (Endung auf A nicht möglich!)

Dies sind alle möglichen Wörter (sonst hätte vorher schon ein Wort gefehlt)

(c) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow{n \to \infty} \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen f_n, f_{n+1} strebt gegen das Verhältnis des Goldenen Schnitts

Übungsserie 5 FS 2013 Seite 2

4

$\mathbb{T}$ Keine Gruppe, denn $s,t \in \mathbb{T}$: $s\cdot t$ im allg. Kein Teiler von 1024 ↯(G1)
z.B. $2\cdot 1024 = 2048$

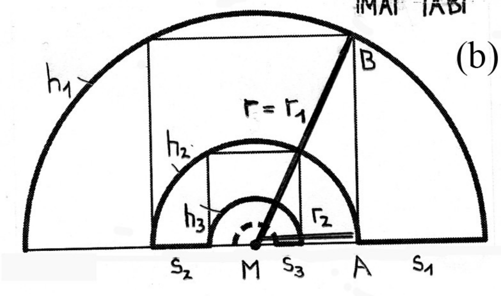
$\mathbb{E}$ Keine Gruppe, denn $t\in\mathbb{E}: e\cdot t = t\cdot e = t \rightsquigarrow e = 1$ "Neutralelement" nicht Element $\mathbb{E}$ ↯(G3)

$\mathbb{K}$ keine Gruppe, denn $t\in \mathbb{K}: t\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot t = 1$ (Neutralelement) $\rightsquigarrow t^{-1}=\frac{1}{t}$ ↯(G4)
z.B. $t=8$, $t^{-1}=\frac{1}{8}$, t^{-1} kein Element von $\mathbb{K}$

$\mathbb{D}$ unendl. kommutative Gruppe: (G1) Für $10^n, 10^m \in\mathbb{D}$ ist $10^n\cdot 10^m = 10^{n+m}$ auch Zehnerord.
(G2) $(10^n\cdot 10^m)\cdot 10^k = 10^{n+m+k} = 10^n(10^m\cdot 10^k)$ (G3) $1\in\mathbb{D}$ Neutralelement mit $10^n\cdot 1 = 10^n$
(G4) zu $10^n\in\mathbb{D}$ ist $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}\in\mathbb{D}$ mit $10^n\cdot 10^{-n}=1$ (KG) $10^n\cdot 10^m = 10^{n+m} = 10^m\cdot 10^n$

5

Im ⊾ΔMAB: $r_1^2 = \underbrace{r_2^2}_{|MA|} + \underbrace{(2r_2)^2}_{|AB|} = 5r_2^2 \rightsquigarrow r_1 = \sqrt{5}\, r_2$, $r_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}r_1$, $s_1 = r_1 - r_2 = r_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}r_1 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)r_1$



(b) Jeder nachfolgende Radius $r_3, r_4, \dots$ ist eine massstäbliche Verkleinerung des vorhergehenden mit Faktor $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$L = h_1+s_1+h_2+s_2+\dots = \pi r_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)r_1 + \pi \underbrace{r_2}_{\frac{1}{\sqrt{5}}r_1} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\underbrace{r_2}_{\frac{1}{\sqrt{5}}r_1}+\dots$$

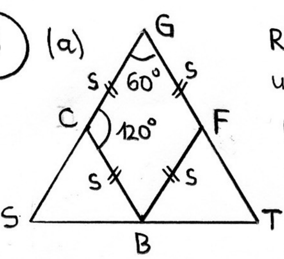
$$= \pi r_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)r_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\underbrace{\left[\pi r_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)r_1+\dots\right]}_{L}$$

$$\rightsquigarrow L - \frac{1}{\sqrt{5}}L = \pi r_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)r_1 \quad \|\cdot\sqrt{5}$$

$$L(\sqrt{5}-1) = r_1(\pi\sqrt{5}+\sqrt{5}-1) \qquad L = \frac{\pi\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}r_1 \quad (=6.68\cdot r)$$

6

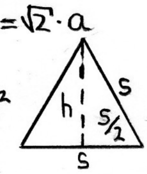
(a)



Rhombus (Raute) mit Seitenlänge $s = \frac{1}{2}|SG| = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\cdot a$ und Winkel 60° bzw. 120°

(b) Oberfläche $O = 6F_{\#} = 12F_\Delta$ mit $F_\Delta = \frac{1}{2} s\cdot\underbrace{\sqrt{s^2-\frac{s^2}{4}}}_{h} = \frac{1}{2} s\sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

$= 12\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2} a)^2 = \underline{6\sqrt{3} a^2}$



(c) $e=8$, $f=6$, $k=12$ $\quad e-k+f = 8-12+6=2$ ✓ Komb. regulär < lauter Rhomben / lauter 3-kantige Ecke

(d) reg. Oktaeder

(e) Volumen $V = V_{Okt} + 2V_{Tetra}$ mit $V_{Okt} = 2\cdot\frac{1}{3} s^2\cdot a = 2\cdot\frac{1}{3}(\sqrt{2}a)^2a = \frac{4}{3}a^3$

$V_{Tetra} \overset{*}{=} \frac{\sqrt{2}}{12}s^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2}a)^3 = \frac{1}{3}a^3$ (*Skript S.61)

$= \frac{4}{3}a^3 + 2\cdot\frac{1}{3}a^3$

$= \underline{\underline{2a^3}}$