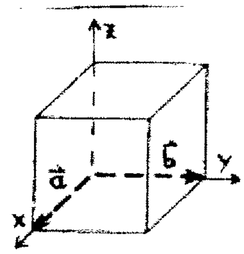
Studiengang Architektur | Mathematisches Denken | WS 2004/05

# Übungsserie 2

**Abgabe** der (ohne TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 14. Jan. 2005**




1. [6P.] Gegeben ist der abgebildete **Würfel** mit Kantenlänge 1.

   (a) Zeichnen Sie in den abgebildeten Würfel die Vektoren $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{w} = (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{a}$. (Länge beachten!)

   (b) Um den Würfel wirklichkeitsgetreuer darzustellen, denken wir ihn uns von parallelen Sonnenstrahlen beleuchtet. Nach dem LAMBERTschen Gesetz ist die *Helligkeit H* einer beleuchteten Fläche proportional zum Kosinus des Licht-Einfallswinkels (gemessen bezüglich dem Einfallslot): $0 \leq H \leq 1 = 100\ \%$

   Mit dieser einfachen Methode lassen sich erstaunlich gute Bilder erstellen. Für realistischere Darstellungen müssen auch Oberflächenbeschaffenheit, Farbe, ... berücksichtigt werden.

   Die Lichtrichtung sei $\vec{v} = (-2; -1; -2)$. Berechnen Sie die Helligkeit der drei beleuchteten Würfelflächen in Prozent. (100 %: senkrechtes Auftreffen)

2. [6P.] Ein Punkt $P$ im $\mathbf{R}^3$ wird an einer festen Ebene $E$ **gespiegelt**. Die Lage von $E$ sei gegeben durch den Punkt $A$ in $E$ und den Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$ von $E$.

   (a) Berechnen Sie aus $\vec{OP}$, $\vec{PA}$, $\vec{n}$ den Vektor $\vec{OP}^*$ des gespiegelten Punktes $P^*$. (Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $\vec{n}$ in die Richtung von $P^*$ zeigt.)

   (b) Gilt die in (a) ermittelte Formel auch für die umgekehrte Orientierung von $\vec{n}$? Ändern Sie die Formel gegebenenfalls entsprechend ab. $E$ liegt?

3. [6P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** $S$ beschrieben

$$S:\ (s,t) \longmapsto \vec{r} := \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \end{pmatrix} \qquad (-\infty < s, t < \infty)$$

   (a) Skizzieren Sie die $s = 0$-Linie und die $t = 0$-Linie in ein räumliches Koordinatensystem. Was für Kurven sind die $s$-Linien bzw. die $t$-Linien?

   (b) Skizzieren Sie nun die Fläche $S$ in das räumliche Koordinatensystem durch ein angedeutetes Netz von $s$- und $t$-Linien.

   (c) Bestimmen Sie eine andere Parameterdarstellung von $S$.

4. [6P.] Die **Erde** ist keine exakte Kugel sondern ein *Rotationsellipsoid*: Die grosse Halbachse $a$ (Äquatorradius) übertrifft die kleine Halbachse $b$ (Polarradius) um mehrere Kilometer; bezüglich der Erdachse besteht Rotationssymmetrie.

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Erdoberfläche mit den Parametern $\varphi$ und $t$.

   (b) Was für Kurven sind die $\varphi$-Linien bzw. die $t$-Linien?

   (c) Leiten Sie die Koordinatengleichung des Rotationsellipsoids her.
   (Tipp: Beachten Sie die Vorgehensweise im Beispiel 1.4 *Ellipse*)

# Übungsserie 2

5. [6P.] **Torus** (Röhrenfläche vom Radius $r$ um kreisförmige 'Mittellinie' mit Radius $a > r$, Figur!)

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche mit den Parametern $\varphi$ und $t$.

   (b) Skizzieren Sie diejenige Kurve auf der Fläche, für die $\varphi = t$ gilt.

   (c) Ändern Sie die Parameterdarstellung in (a) so ab, dass der 'Röhrenradius' in zwei Umläufen auf 0 abnimmt.

---

Die Abbildung zeigt CALATRAVAS *Montjuic Communications Tower* in Barcelona, Spain, 1989-92.

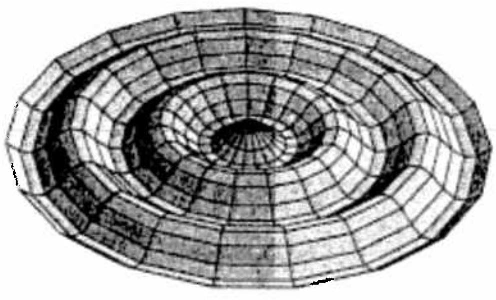
6. [6P.] **Rotationsflächen** sind Flächen, die durch Rotation einer ebenen Kurve (*Meridiankurve*) um eine feste Achse (die in der Ebene der Kurve liegt) entstehen. Die Parameterdarstellung einer in der Natur und Technik häufig vorkommenden Rotationsfläche $S$ (mit der $z$-Achse als Rotationsachse) lautet:

$$S:\ (\varphi,t) \longmapsto \vec{r} := \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t < \infty)$$

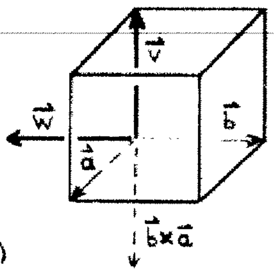
   (a) Skizzieren Sie die in der $(x,z)$-Ebene liegende Meridiankurve von $S$, geben Sie deren Gleichung in der Form $z = f(x)$ an und $S$ einen passenden Namen.

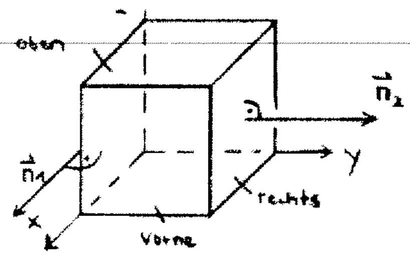
   (b) Leiten Sie die Koordinatengleichung der Fläche $S$ her.Gleichung in der Form $z = f(x,y)$

   (c) Wie lautet eine Parameterdarstellung der Fläche, die etwa wie die abgebildete (nach aussen unendlich fortgesetzte) '**kreiswellenförmige Fläche**' aussieht?



① Richtung gemäss Drei-Finger-Regel




(a) Länge: $|\vec{v}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin 90° = 1$

$|\vec{w}| = \underbrace{|\vec{b}\times\vec{a}|}_{|-\vec{v}|=1}\cdot|\vec{a}|\sin 90° = 1$

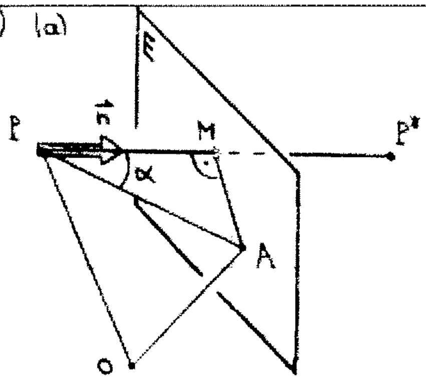
(b) Einfallslot: (Normalenvektor auf Fläche)

vorne: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, rechts: $n_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, oben: $n_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, Lichtstrahl : $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ (nach oben)

$\cos(\alpha_1) = \dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{v}}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3} \approx 0.67 \to$ Helligkeit vorne: $\underline{67\%}$ ; analog rechts: $\underline{33\%}$, oben: $\underline{67\%}$

---

② (a)




$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP^*} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PM} =$

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{PM}$:

im Dreieck PAM: $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{PA}|}$

gemäss Satz 1.1: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}}{\underbrace{|\vec{n}|}_{=1}|\overrightarrow{PA}|}$

$\Big\}\ |\overrightarrow{PM}| = \vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}$ (Vgl. auch Agb 1.5)

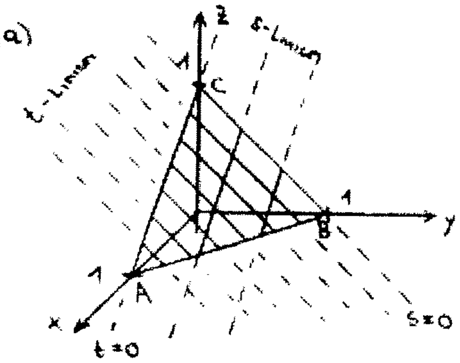
also $\overrightarrow{PM} = |\overrightarrow{PM}|\,\vec{n} = (\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA})\vec{n}$ und somit

$\underline{\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2(\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA})\cdot\vec{n}}$

(b) Formel gilt auch für die umgekehrte Orientierung von $\vec{n}$. $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2(\overset{\text{Kompensation}}{-}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA})\cdot(-\vec{n})$

---

③ (a)




s=0-Linie: $t \longmapsto \begin{pmatrix}0\\t\\1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

t=0-Linie: $s \longmapsto \begin{pmatrix}s\\0\\1-s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

s-Linien und t-Linien sind <u>Geraden</u>

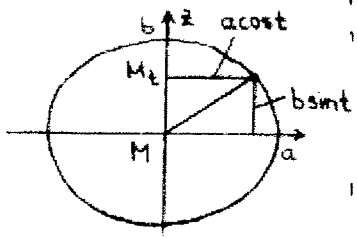
(b) S ist eine Ebene durch A, B, C

(c) $S: (s^*, t^*) \longmapsto \vec{r} = \underset{\overrightarrow{OA}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + s^*\underset{\overrightarrow{AB}}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}} + t^*\underset{\overrightarrow{AC}}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}} = \underline{\begin{pmatrix}1-s^*-t^*\\s^*\\t^*\end{pmatrix}}$

$(-\infty < s^*, t^* < \infty)$

---

④ (a) Wahl des Koordinatensystems: Ursprung in der Erdmitte, z-Achse auf der Erdachse




'Erster' Kreis mit Mittelpunkt M(0|0|0) und Radius R = a:

$\begin{pmatrix}a\cos f\\a\sin f\\0\end{pmatrix}$ $(0 \le f \le 2\pi)$

'Späterer' Kreis mit Mittelpunkt $M_t(0|0|b\sin t)$ und Radius $R = a\cos t$

$\begin{pmatrix}a\cos t\cos f\\a\cos t\sin f\\b\sin t\end{pmatrix}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

Rotations Ellipsoid: $(\varphi, t) \longmapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos t\cos\varphi \\ a\cos t\sin\varphi \\ b\sin t \end{pmatrix}$ $\quad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$

(b) $\varphi$-Linien: (Halb)-Ellipsen mit Halbachsen $a, b$ (Meridiane)
$t$-Linien: Breitenkreise um die $z$-Achse

(c) $x = a\cos t\cos\varphi$, $y = a\cos t\sin\varphi$, $z = b\sin t$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \cos^2 t\cos^2\varphi + \cos^2 t\sin^2\varphi + \sin^2 t = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\cos^2 t + \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

---

(5) (a) Wahl des Koordinatensystems: Ursprung in der Torusmitte, $z$-Achse auf der Symmetrieachse

Mittelpunkt $M_\varphi$ auf der Mittellinie: $M_\varphi(a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$ $\quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$

Röhrenkreis um $M_\varphi$ mit Radius R: $\vec{r} = \begin{pmatrix} (a - r\cos t)\cos\varphi \\ (a - r\cos t)\sin\varphi \\ r\sin t \end{pmatrix}$ $\quad (0 \le \varphi, t \le 2\pi)$

(b) Die Kurve verläuft "einmal" um den Torus herum und windet sich gleichzeitig einmal um die Röhre

(c) Röhrenradius $r$ nimmt mit $\varphi$ in $4\pi$ (linear) auf 0 ab: $\left(r - \frac{\varphi}{4\pi} r\right)$

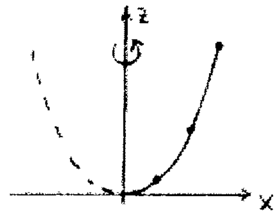
$$S: (\varphi, t) \longmapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} \left[a - \left(r - \frac{\varphi}{4\pi} r\right)\cos t\right]\cos\varphi \\ \left[a - \left(r - \frac{\varphi}{4\pi} r\right)\cos t\right]\sin\varphi \\ \left(r - \frac{\varphi}{4\pi} r\right)\sin t \end{pmatrix}$$

---

(6) (a) $(x,z)$-Ebene: $\varphi = 0$, d.h. $\varphi = 0$-Linie: $t \longmapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$;

mit $x = t$ gilt: $z = t^2 = x^2$ (Parabel)

Fläche: Rotationsparaboloid



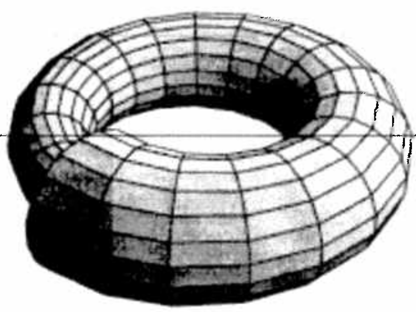

(b) $x = t\cos\varphi$, $y = t\sin\varphi$, $z = t^2$ $\quad x^2 + y^2 = t^2\cos^2\varphi + t^2\sin^2\varphi = t^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = z$

(c) $z = \cos x$ um $z$-Achse rotieren:

$$S^*: (\varphi, t) \longmapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t < 0)$$

```
In[2]:= ParametricPlot3D[{2*Cos[t] - (1 - t / (4 Pi)) Cos[u] * Cos[t],
    2 * Sin[t] - (1 - t / (4 Pi)) Cos[u] * Sin[t], (1 - t / (4 Pi)) Sin[u]},
    {t, 0, 2 Pi}, {u, 0, 2 Pi}, ViewPoint -> {2, 2, 2}, Boxed -> False, Axes -> None]
```

(5c)



```
Out[2]= - Graphics3D -
```