Übungsserie 1

Abgabe der (ohne Taschenrechner) gelösten Aufgaben: **Freitag 24. November 2006**

1. Die **Kurve** γ ist durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$\gamma: \ [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein ebenes Koordinatensystem und berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von γ mit der x-Achse.

   (b) Zeigen Sie, dass für die Punkte (x, y) von γ gilt: $\left(x(\varphi) - \frac{1}{2}\right)^2 + y(\varphi)^2 = \frac{1}{4}$. Um was für eine Kurve handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente.)

2. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Raumkurve** γ beschrieben

$$\gamma:]-\infty, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie γ und ihren Grundriss γ' in ein räumliches Koordinatensystem. Um was für spezielle Kurven handelt es sich?

   (b) Welchen t-Wert hat der Schnittpunkt von γ mit der (x, y)-Ebene bzw. jener mit der (y, z)-Ebene? Welche Koordinaten haben diese Punkte?

   (c) Bestimmen Sie eine Gleichung von γ' (aufgefasst als Kurve in der (x, y)-Ebene) in der Form $y = f(x)$.

3. Ein **Kran** mit Ausleger der Länge L dreht sich in der Zeit T einmal um seine Achse. Gleichzeitig bewegt sich die Laufkatze vom äussersten Punkt des Auslegers mit der Geschwindigkeit v auf dem Ausleger zum Turm hin. Ferner wird der Lasthaken von der Laufkatze gleichmässig in der Zeit T vom Boden in die Höhe H gezogen.

   (a) Erstellen Sie eine Skizze der Bahnkurve γ, die der Lasthaken beschreibt.

   (b) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und bestimmen Sie eine Parameterdarstellung dieser Bahnkurve.

4. In der Ebene sind **zwei Kreise** k_1, k_2 mit den Mittelpunkten F_1, F_2, den Radien $r_1 = 2.5$, $r_2 = 3.5$ und dem Mittelpunktsabstand $d = 4$ gegeben. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte jener Kreise, die k_1 und k_2 (den einen von innen, den andern von aussen) berühren?

   (a) Zeichnen Sie k_1, k_2 und mehrere, verschieden grosse Kreise, die je k_1 und k_2 von innen berühren. Erstellen Sie eine Skizze derjenigen Kurve, auf welcher die Mittelpunkte solcher Kreise liegen. (Symmetrieachsen einzeichnen!)

   (b) Zeigen Sie mithilfe der Gärtnerdefinition, dass es sich bei dieser Kurve um eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 handelt.

   (c) Berechnen Sie die Längen a und b der grossen und kleinen Halbachse.

Bitte wenden!

Übungsserie 1

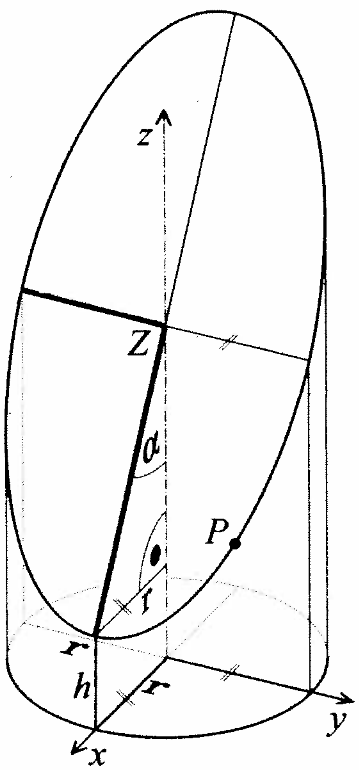
5. **Ableitungstraining:** Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

(a) $x(t) = 4t$	(b) $y(t) = 1 + 3t$	(c) $x(t) = R\sin\left(\frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}\,t\right)$
(d) $y(t) = at\sin t$	(e) $x(t) = tR\cos\varphi$	(f) $x(\varphi) = tR\cos\varphi$
(g) $z(t) = \frac{h}{2\pi}\varphi$	(h) $z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\varphi$	(i) $x(\varphi) = e^{\varphi}\cos\varphi$

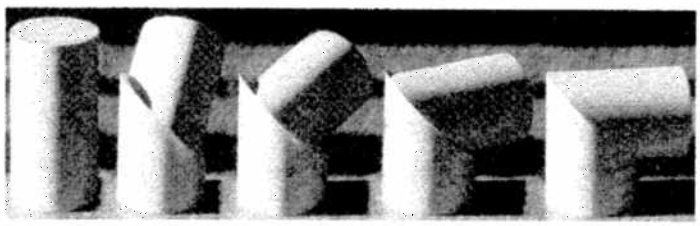
6. Die Abbildung unten zeigt einen unter dem Winkel $\alpha = 45°$ schräg abgeschnittenen Hohlzylinder, einen **Zylinderhuf**, in einem räumlichen Koordinatensystem. Der Radius des Zylinderhufs sei r, die geringste Höhe betrage h.
Man kann zeigen, dass schräge Schnitte eines Zylinders stets elliptische Schnittkurven ergeben. Der Schrägschnitt des Zylinderhufs (= Schnittkurve) ist also eine im Raum geneigte Ellipse.

   (a) Wie lautet eine Parameterdarstellung der Grundkreislinie bzw. eine Parameterdarstellung des Schrägschnitts des Zylinderhufs. (Tipp: Um die z-Komponente zu bestimmen, benutzen Sie die Parallele zur y-Achse durch den Schrägschnittmittelpunkt Z.)

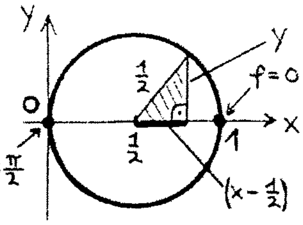
   (b) Nun wird der Zylinderhuf entlang seiner geringsten Höhe aufgeschnitten und flach ausgebreitet. Die ausgebreitete Grundkreislinie lege die neue x-Achse, die grösste Höhe die neue y-Achse eines ebenen Koordinatensystems fest. Skizzieren Sie in diesem Koordinatensystem die durch den ausgebreiteten Schrägschnitt entstehende Kurve $\tilde{\gamma}$. Was für eine Kurve ist $\tilde{\gamma}$?



Die beiden Teile eines schräg abgeschnittenen Zylinders können zu einem Rohrknie zusammengebaut werden, indem man einen der beiden um 180° verdreht (siehe unten). Wenn die Schnittebene mit der Zylinderachse den Winkel $\alpha = 45°$ bildet, dann bilden die Rohrachsen den Winkel $2\alpha = 90°$, ein rechtwinkliges Rohrknie (siehe [Glaeser]).



Übungsserie 1 WS 06/07, Seite 1



(1) (a) $\begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow \cos\varphi = 0$ od. $\sin\varphi = 0$,

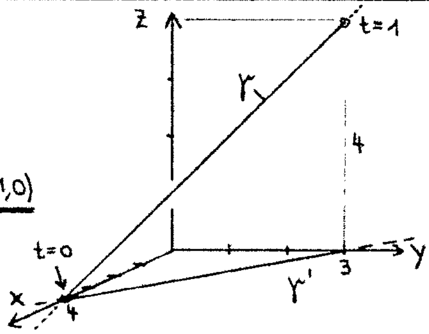
$\varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \varphi_3 = 0$

in $x(\varphi) = \cos^2\varphi$: $\underline{x_{1,2} = 0}$, $\underline{x_3 = 1}$ $\Big\}\begin{matrix}(0,0)\\(1,0)\end{matrix}$ ‖ $\varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{2}$

(b) $(x(\varphi)-\frac{1}{2})^2 + y(\varphi)^2 = (\cos^2\varphi - \frac{1}{2})^2 + \cos^2\varphi\sin^2\varphi = \cos^4\varphi - 2\cdot\frac{1}{2}\cos^2\varphi + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi\underbrace{\sin^2\varphi}_{=(1-\cos^2\varphi)}$

$= \cos^4\varphi - \cos^2\varphi + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi - \cos^4\varphi = \frac{1}{4}$

γ ist ein <u>Kreis</u> mit Mittelpunkt $\underline{M = (\frac{1}{2}, 0)}$ und Radius $\underline{r = \frac{1}{2}}$ (Pythagoras in △)



(2) (a) **Geraden!** $\left(\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{t=0}}$, in $\left.\begin{matrix} x(t) = 4-0 = 4 \\ y(t) = 0+1 = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{\underline{(4,1,0)}}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{t=1}}$, in $\left.\begin{matrix} x(t) = 0 \\ y(t) = 3 \\ z(t) = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{\underline{(0,3,4)}}$

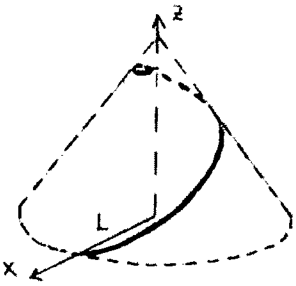
(c) γ': $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ $\quad x(t) = 4-4t$, $4t = 4-x$, $t = 1-\frac{x}{4}$, in $y(t)$

(kein z) $\quad y(t) = 2\cdot(1-\frac{x}{4}) + 1 = -\frac{x}{2} + 3$, $\underline{\underline{y = -\frac{x}{2} + 3}}$

---

(3) (b) Koordinatensystem: z-Achse = Kranachse, Ursprung am Boden, Lasthaken zu Beginn ($t=0$) auf x-Achse

(a)



Radius zur Zeit t: $r(t) = L - vt$

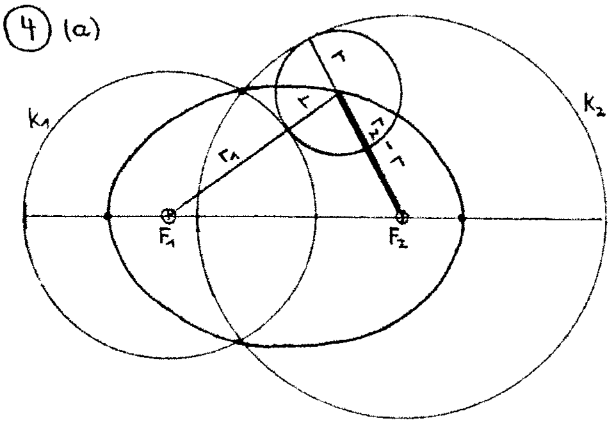
Winkel bez x-Achse: $\varphi(t) = \frac{2\pi}{T}\cdot t$

Höhe über Boden $z(t) = \frac{H}{T}\cdot t$

$t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (L-vt)\cos(\frac{2\pi}{T}t) \\ (L-vt)\sin(\frac{2\pi}{T}t) \\ \frac{H}{T}\cdot t \end{pmatrix}$

---

(4) (a)



(b) Für jeden Kreismittelpunkt P gilt:

$|F_1P| + |F_2P| = r_1 + r + r_2 - r = r_1 + r_2 = 6$

Die Summe der Entfernungen zu den Punkten F_1, F_2 ist konstant. $\rightsquigarrow$ Ellipse (Skript S.9)

(c) $2a = r_1 + r_2 = 6$, $\underline{a = 3}$

$2c = |F_1F_2| = 4$, $\underline{c = 2}$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9-4} = \underline{\sqrt{5}}$

↑ Skript S.9

Übungsserie 1 WS 06/07, Seite 2

① $(x^n)' = n x^{n-1}$, speziell: $(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$, $(\text{Zahl})' = 0$

② $(f+g)' = f' + g'$ ③ $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$

④ Kettenregel $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Abl}}$

⑤ Produktregel $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

⑤ (a) $x'(t) = (4t)' \overset{①}{=} 4 \cdot 1 = \underline{\underline{4}}$

(b) $y'(t) = (1+3t)' \overset{②}{=} (1)' + (3t)' \overset{①}{=} 0 + 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

(c) $x'(t) = \left(\underset{f}{R\sin}\left(\underset{g}{\underbrace{\tfrac{2\pi}{60s} t}}\right)\right)' \overset{③}{\underset{④}{=}} \underset{f'}{R\cos}\left(\tfrac{2\pi}{60s} t\right) \cdot \underbrace{\left(\tfrac{2\pi}{60s} t\right)'}_{\text{innere Abl}} \overset{①}{=} R\cos\left(\tfrac{2\pi}{60s} t\right) \cdot \underset{g'}{\underbrace{\tfrac{2\pi}{60s}}} = \underline{\underline{\tfrac{2\pi R}{60s} \cos\left(\tfrac{2\pi}{60s} t\right)}}$

(d) $y'(t) = (\underset{f \cdot g}{a t \sin t})' \overset{⑤}{=} a[\underset{f' \cdot g}{(t)' \sin t} + \underset{f \cdot g'}{t \cdot (\sin t)'}] \overset{①}{\underset{③}{=}} a[1 \cdot \sin t + t \cos t] = \underline{\underline{a \sin t + a t \cos t}}$

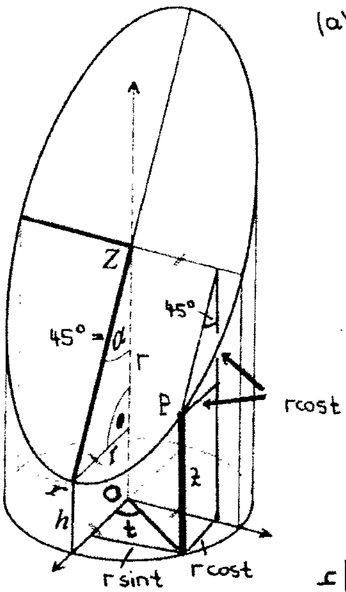
(e) $x'(t) = (t R \cos\varphi)' = R\cos\varphi \cdot (t)' = \underline{\underline{R\cos\varphi}}$ (f) $x'(\varphi) = (t R \cos\varphi)' = tR(\cos\varphi)' \overset{③}{=} \underline{\underline{-tR\sin\varphi}}$

(g) $z'(t) = \left(\tfrac{h}{2\pi}\varphi\right)' = \tfrac{h}{2\pi}\varphi \cdot \underbrace{(1)'}_{=0} \overset{①}{=} \underline{\underline{0}}$ (h) $z'(\varphi) = \left(\tfrac{h}{2\pi}\varphi\right)' = \tfrac{h}{2\pi}(\varphi)' \overset{①}{=} \tfrac{h}{2\pi} \cdot 1 = \underline{\underline{\tfrac{h}{2\pi}}}$

(i) $x'(\varphi) = [\underset{f}{e^\varphi} \underset{g}{\cos\varphi}]' \overset{⑤}{=} \underset{f'}{(e^\varphi)'} \underset{g}{\cos\varphi} + \underset{f}{e^\varphi} \underset{g'}{(\cos\varphi)'} \overset{③}{=} e^\varphi \cos\varphi + e^\varphi(-\sin\varphi) = \underline{\underline{e^\varphi \cos\varphi - e^\varphi \sin\varphi}}$
(da $(e^\varphi)' = e^\varphi$)

---

⑥



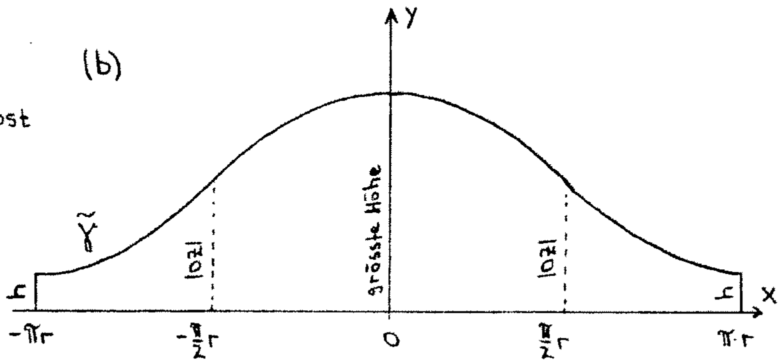
(a) Kreis um (0,0,0) mit Radius r: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{r}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}}}$

Schrägschnitt: $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, $|OZ| = h + r$

$z(t) = |OZ| - r\cos t = h + r - r\cos t$

$\underline{\underline{e: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ h+r-r\cos t \end{pmatrix}}}$

(b)



$\tilde{\gamma}$ ist eine verschobene Cosinuskurve

(Für Interessierte: Die Gleichung von $\tilde{\gamma}$ ist $y = h + r + r\cos\left(\frac{x}{r}\right)$)